

ЛОПУШАНСЬКИЙ А.О.

**РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ДИFUЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В
ПРАВИХ ЧАСТИНАХ**

Доведено однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0, 2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та встановлено деякі достатні умови регулярності його розв'язку за змінною t .

Ключові слова і фрази: похідна дробового порядку, узагальнена функція, крайова задача, вектор-функція Гріна.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine

ВСТУП

У даній статті встановлюємо однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувілля порядку $\beta \in (0, 2)$, додатним гладким коефіцієнтом $a(t)$, узагальненими функціями в правих частинах та знаходимо деякі достатні умови регулярності розв'язку за змінною t .

Відомо [12], що узагальнені розв'язки рівнянь з частинними похідними та сталими коефіцієнтами у випадку правої частини $F(x, t) = F_0(x) \cdot \delta(t)$ ($\delta(t)$ — дельта-функція Дірака, крапкою позначено прямиий добуток узагальнених функцій) є нескінченно диференційовними за змінною t в узагальненому сенсі: значення $(u(\cdot, t), \varphi(\cdot))$ розв'язку $u(x, t)$ на довільній основній функції $\varphi(x)$ є нескінченно диференційовною функцією змінної t .

На прикладі дифузійно-хвильового рівняння показуємо, що подібною властивістю володіють розв'язки крайових задач для рівнянь з дробовою похідною за змінною t : у випадку узагальненої функції $F(x, t) = F_0(x) \cdot g(t)$ регулярність за змінною t узагальненого розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1) визначається властивостями функцій

$a(t)$ та $g(t)$, зокрема, при неперервних $a(t)$ та $g(t)$ розв'язок $u(x, t)$ задачі також є узагальненою функцією, неперервною за змінною t .

Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

1 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Використовуємо такі позначення: $Q_0 = (0, l) \times (0, T]$, $C_+[0, T]$ — клас неперервних на $[0, T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій, $C_+^\infty[0, T] = C^\infty[0, T] \cap C_+[0, T]$, $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ ($N = 1, 2$), $\mathfrak{D}(0, l)$, $\mathfrak{D}[0, l]$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в \mathbb{R}^N , $(0, l)$, $[0, l]$ [10, с. 13], $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$, $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}'(0, l)$, $\mathfrak{D}'[0, l]$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{D}(0, l)$, $\mathfrak{D}[0, l]$, $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, (F, φ) — значення $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, а також значення $F \in \mathfrak{D}'(0, l)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(0, l)$, $F \in \mathfrak{D}'[0, l]$ на $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$, $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T] = \{F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) | (F(x, \cdot), \varphi(x)) \in C[0, T] \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, l)\}$ — клас узагальнених функцій із $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$, неперервних за змінною $t \in [0, T]$ [12].

Позначимо через $\widehat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ [10, с. 111], тобто $(g \widehat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi))$. Нехай $f * g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ — згортка узагальнених функцій $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, що на кожному основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ діє за правилом $(f * g, \varphi) = (f, g \widehat{*} \varphi)$; $f(x) \cdot g(t) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ — прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, тобто узагальнена функція, що на кожному основну функцію $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ діє за правилом $(f \cdot g, \varphi) = (f(x), (g(t), \varphi(x, t)))$.

Зауважимо, що у випадку $g \in L_1(0, T)$ маємо

$$(f \cdot g, \varphi) = \left(f(x), \int_0^T g(t) \varphi(x, t) dt \right) = \int_0^T g(t) (f(x), \varphi(x, t)) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

Використаємо функцію (див. [12]) $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \quad \text{при } \lambda > 0$$

і $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \leq 0$, де $\Gamma(\lambda)$ — гама-функція, $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда. Правильні наступні співвідношення $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$, $f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Нагадаємо, що похідну $v_t^{(\beta)}(x, t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x, t)$ порядку $\beta > 0$ визначають за формулою

$$v_t^{(\beta)}(x, t) = f_{-\beta}(t) * v(x, t);$$

регуляризовану похідну дробового порядку [1],[2] за формулами:

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{v_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x, 0)}{t^\beta} \right] \\ &= v_t^{(\beta)}(x, t) - f_{1-\beta}(t)v(x, 0), \quad \text{при } \beta \in (0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x, \tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau = v_t^{(\beta)}(x, t) - f_{1-\beta}(t)v(x, 0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x, 0), \\ &\quad \text{при } \beta \in (1, 2). \end{aligned}$$

Нехай $C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) \mid v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$. Введемо оператори

$$L: (Lv)(x, t) \equiv v_t^{(\beta)}(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_0, \quad v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0),$$

$$L^{reg}: (L^{reg}v)(x, t) \equiv D_t^\beta v(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$\hat{L}: (\hat{L}v)(x, t) \equiv f_{-\beta} \hat{*} v(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_0, \quad v \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0),$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_0) = \{v \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0) : v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]\}.$$

Як у [9] показуємо, що для $v \in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Гріна

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} v(y, \tau) (\hat{L}\psi)(y, \tau) dy d\tau &= \int_{Q_0} (L^{reg}v)(y, \tau) \psi(y, \tau) dy d\tau \\ &+ \int_0^T a(\tau) [v(0, \tau) \psi_y(0, \tau) - v(l, \tau) \psi_y(l, \tau)] d\tau \\ &+ \int_0^l v(y, 0) dy \int_0^T f_{1-\beta}(\tau) \psi(y, \tau) d\tau + \int_0^l v_\tau(y, 0) dy \int_0^T f_{2-\beta}(\tau) \psi(y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Розглянемо першу крайову задачу

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = F_2(x), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

для рівняння (1) при $\beta \in (0, 2)$ (умова (4) відсутня у випадку $\beta \in (0, 1]$) за одного з наступних припущень:

$$(A) \quad a \in C_+^\infty[0, T], F \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0), F_j \in \mathcal{D}'[0, l], j = 1, 2,$$

$$(B) \quad a \in C_+[0, T], F(x, t) = F_0(x) \cdot g(t), g \in C[0, T], F_j \in \mathcal{D}'[0, l], j = 0, 1, 2.$$

Розв'язком задачі (1)–(4) за припущення (A) (або (B)) називається функція $u \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0)$, що задовольняє тотожність

$$(u, \hat{L}\psi) = (F, \psi) + \sum_{j=1}^2 \left(F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t) \psi(\cdot, t) dt \right) \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_0). \quad (5)$$

2 ВЛАСТИВОСТІ СПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ГРІНА

Означення. Вектор-функція $(G_0(x, t, y, \tau), G_1(x, t, y, \tau), G_2(x, t, y, \tau))$, така що при достатньо гладких g_0, g_1, g_2 функція

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x, t, y, \tau) g_0(y, \tau) dy + \sum_{j=1}^2 \int_0^l G_j(x, t, y, 0) g_j(y) dy, \quad (x, t) \in \bar{Q}_0, \quad (6)$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$) розв'язком першої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = g_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad x \in [0, l], t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in [0, l],$$

називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$$\begin{aligned}(LG_0)(x, t, y, \tau) &= \delta(x - y, t - \tau), \quad (x, t), (y, \tau) \in Q_0; \\ G_j(0, t, y, \tau) &= G_j(l, t, y, \tau) = 0, \quad y \in (0, l), t, \tau \in (0, T], j = 0, 1, 2; \\ G_1(x, 0, y, 0) &= \delta(x - y), \quad \frac{\partial}{\partial t} G_2(x, 0, y, 0) = \delta(x - y), \quad x, y \in (0, l).\end{aligned}$$

Як при доведенні леми 1 із [9] показуємо, що

$$G_j(x, t, y, 0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x, t, y, 0), \quad (x, t) \in Q_0, \quad y \in (0, l), \quad j = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Теорема 1. При $a \in C_+[0, T]$ вектор-функція Гріна першої крайової задачі (1)–(4) існує.

Доведення. Враховуючи формулу (7), достатньо довести існування головної функції Гріна $G_0(x, t, y, \tau)$. Як у [4], [7] для задачі Коші та у [5] для загальних параболічних крайових задач, її існування можна довести методом Леві, використовуючи відомий фундаментальний розв'язок даного рівняння зі сталим коефіцієнтом a [3].

Існування функції $G_0(x, t, y, \tau)$ можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі Гріна за функції $\psi_k \in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь

$$(\widehat{L}\psi_k)(y, t) = \varphi_k(x, t, y, \tau),$$

де послідовність $\varphi_k(x, t, y, \tau)$ ($k \rightarrow \infty$) є дельта-видною, із формули Гріна після граничного переходу при $k \rightarrow \infty$ одержуємо зображення (6) розв'язку задачі (1)–(4), де $G_0(x, t, y, \tau)$ (границя послідовності ψ_k у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$) як функція (y, τ) є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}(\widehat{L}_{y,\tau}G_0)(x, t, y, \tau) &= \delta(x - y, t - \tau), \quad (x, t), (y, \tau) \in Q_0, \\ G_0(x, t, 0, \tau) &= G_0(x, t, l, \tau) = 0, \quad G_0(x, t, y, T) = G_{0\tau}(x, t, y, T) = 0.\end{aligned} \quad (8)$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x, t, y, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x, t, \tau)\omega_m(y), \quad (9)$$

де $\omega_m(y)$ — ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\omega_m'' + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in (0, l), \quad \omega_m(0) = \omega_m(l) = 0.$$

Підставляючи (9) у рівняння задачі (8), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} [f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x, t, \tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x, t, \tau)]\omega_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(x - y), \omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t - \tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x - y), \omega_m(y)) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для $S_m(x, t, \tau)$:

$$\begin{aligned}f_{-\beta}(\tau)\widehat{*}S_m(x, t, \tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x, t, \tau) &= \omega_m(x)\delta(t - \tau), \\ S_m(x, t, T) &= S_{m\tau}(x, t, T) = 0, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned} \quad (10)$$

Кожна з задач (10) зводиться до лінійного інтегрального рівняння

$$S_m(x, t, \tau) + \lambda_m f_{\beta}(\tau)\widehat{*}(a(\tau)S_m(x, t, \tau)) = f_{\beta}(t - \tau)\omega_m(x). \quad (11)$$

Методом послідовних наближень знаходимо його розв'язок у вигляді рівномірно збіжного при $x \in [0, l]$, $0 \leq \tau < t \leq T$, ряду

$$S_m(x, t, \tau) = \left[f_{\beta}(t - \tau) + \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda_m)^p f_{\beta}(\tau)\widehat{*} \left(a(\tau) \left(f_{\beta}(\tau)\widehat{*} \left(\dots a(\tau) \left(f_{\beta}(\tau)\widehat{*} \left(a(\tau) f_{\beta}(t - \tau) \right) \right) \right) \right) \right)}_p \right] \omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = \text{const} > 0$ матимемо

$$\begin{aligned} S_m(x, t, \tau) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x) \\ &= (t-\tau)^{\beta-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^{\beta}]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)} \omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta}(-a\lambda_m(t-\tau)^{\beta})\omega_m(x), \end{aligned}$$

де $E_{\beta}(z) = E_{\beta-1}(z, \beta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ — функція Міттаг-Лефлера [2], що при великих $|z|$ має оцінку $E_{\beta}(z) \leq \frac{C}{|z|}$, $C = C(\beta)$ — деяка додатна стала. Тоді збіжність ряду (9) впливає з рівномірної збіжності ряду

$$\frac{C}{a(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x, y \in [0, l], \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

В загальному випадку, при $a_0 \leq a(t) \leq A_0$ для всіх $t \in [0, T]$ оцінюємо у виразі для $S_m(x, t, \tau)$ суму двох сусідніх доданків:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\lambda_m^{2k} f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(a(\tau) \left(f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(\dots a(\tau) f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(a(\tau) f_{\beta}(t-\tau) \right) \right) \right) \right)}_{2k} \\ &- \underbrace{\lambda_m^{2k+1} f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(a(\tau) \left(f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(\dots a(\tau) f_{\beta}(\tau) \widehat{*} \left(a(\tau) f_{\beta}(t-\tau) \right) \right) \right) \right)}_{2k+1} \\ &\leq \lambda_m^{2k} \left[A_0^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau) \right] \\ &\leq \lambda_m^{2k} \left[c^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau) \right] \end{aligned}$$

при деякому $c < a_0$ та всіх $\lambda_m \geq \frac{A_0^{2k} - c^{2k}}{a_0^{2k+1} - c^{2k+1}} \cdot \frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = \frac{A_0^{2k} - c^{2k}}{a_0^{2k+1} - c^{2k+1}} \cdot \frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)(t-\tau)^{\beta}}$. Зауважимо, що згідно з [11, с. 67] $\frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)} = O((2k\beta)^{\beta})$ для великих k . Тоді при великих $\lambda_m(t-\tau)^{\beta}$ матимемо

$$|S_m(x, t, \tau)| \leq (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta}(-c\lambda_m(t-\tau)^{\beta}) |\omega_m(x)|, \quad x \in [0, l], \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Отже, при $a \in C_+[0, T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку розв'язку рівняння (11) при великих $\lambda_m(t-\tau)^{\beta}$, а звідси рівномірну при $x, y \in [0, l], 0 \leq \tau < t \leq T$, збіжність ряду (9). Головна функція Гріна задачі (1)–(4) існує. \square

Наслідок 1. *Правильні оцінки*

$$|G_i(x, t + \Delta t, y, \tau, a) - G_i(x, t, y, \tau, a)| \leq M_i(x, t, y, \tau, a) |\Delta t|^{\gamma}, \quad (x, t), (y, \tau) \in \overline{Q}_0, \quad (12)$$

де $0 < \gamma < 1$, невід'ємні функції $M_i(x, t, y, \tau, a)$ мають такі ж оцінки, як $G_i(x, t, y, \tau, a)$, $i = 0, 1, 2$, відповідно із заміною β на $\beta - \gamma$.

Доведення. Використовуючи зображення (9), матимемо

$$G_0(x, t + \Delta t, y, \tau, a) - G_0(x, t, y, \tau, a) = \sum_{m=1}^{\infty} [S_m(x, t + \Delta t, \tau, a) - S_m(x, t, \tau, a)] \omega_m(y). \quad (13)$$

Для функцій $Z_m(x, t, \tau, \Delta t, a) = S_m(x, t + \Delta t, \tau, a) - S_m(x, t, \tau, a)$ одержуємо інтегральні рівняння

$$Z_m(x, t, \tau, \Delta t, a) + \lambda_m f_\beta(\tau) \widehat{*}(a(\tau) Z_m(x, t, \tau, \Delta t, a)) = [f_\beta(t + \Delta t - \tau) - f_\beta(t - \tau)] \omega_m(x)$$

вигляду (11). Оскільки $f_\beta(t + \Delta t - \tau) - f_\beta(t - \tau) = f_{-\lambda}(t) * [f_{\beta+\lambda}(t + \Delta t - \tau) - f_{\beta+\lambda}(t - \tau)]$, при $1 - \beta < \lambda < 1$, якщо $\beta \in (0, 1)$, та $\lambda < 2 - \beta$, якщо $\beta \in (1, 2)$, маємо $\beta + \lambda - 1 = \gamma \in (0, 1)$ та $\beta - \gamma = 1 - \lambda > 0$, то враховуючи нерівність

$$|(t + \Delta t - \tau)^\gamma - (t - \tau)^\gamma| = (t - \tau)^\gamma \left| \left(1 + \frac{\Delta t}{t - \tau}\right)^\gamma - 1 \right| \leq |\Delta t|^\gamma,$$

одержуємо

$$|f_\beta(t + \Delta t - \tau) - f_\beta(t - \tau)| \leq f_{1-\lambda}(t - \tau) |\Delta t|^\gamma = f_{\beta-\gamma}(t - \tau) |\Delta t|^\gamma.$$

Як в доведенні теореми 1 знаходимо функції $Z_m(x, t, y, \tau, \Delta t, a)$, що матимуть такі ж оцінки, як розв'язки рівнянь (11) із заміною β на $\beta - \gamma$ та множителем $|\Delta t|^\gamma$. Враховуючи зображення (13), одержуємо оцінку (12) при $j = 0$. Інші оцінки в наслідку одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи співвідношення (7). \square

Використовуватимемо надалі позначення $G_j(x, t, y, \tau, a)$ замість $G_j(x, t, y, \tau)$, $j = 0, 1, 2$. Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x, t, y, \tau, a)$ та $G_j(x, t, y, 0, a)$ правильні такі ж оцінки, як для параметриксів $G(x - y, t - \tau, a(\tau))$, $f_{j-\beta}(t) * G(x - y, t, 0, a(0))$, $j = 1, 2$, відповідно [4], [7], [8].

Згідно з [3], фундаментальна функція $G(x, t, a)$ оператора L зі сталим коефіцієнтом $a > 0$ має вигляд

$$G(x, t, a) = \frac{\pi^{-1/2} t^{\beta-1}}{|x|} H_{1,2}^{2,0} \left(\frac{|x|^2}{4at^\beta} \middle| \begin{matrix} (\beta, \beta) \\ (1, 1) \end{matrix} \right. \left. (1/2, 1) \right),$$

де $H_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right)$ — H -функція Фокса [6].

Використовуючи властивості H -функцій Фокса (як у [9]), метод Леві та враховуючи результати [13], знаходимо оцінки для компонент вектор-функції Гріна та їх похідних. При $[a(t)]^{-1} \leq R$ для всіх $t \in [0, T]$ матимемо

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k G_0(x, t, y, \tau, a) \right| \leq C_k^* R^{\frac{k+1}{2}} (t - \tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}, \quad |x - y|^2 < 4(t - \tau)^\beta / R,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k G_0(x, t, y, \tau, a) \right| \leq \frac{C_k (t - \tau)^{\beta-1}}{|x - y|^{k+1}}, \quad |x - y|^2 > 4(t - \tau)^\beta / R, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k G_j(x, t, y, 0, a) \right| \leq C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}, \quad |x - y|^2 < 4t^\beta / R,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k G_j(x, t, y, 0, a) \right| \leq \frac{\widehat{C}_{jk} t^{j-1}}{|x - y|} \left(\frac{R|x - y|^2}{4t^\beta} \right)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}} e^{-c \left(\frac{R|x - y|^2}{4t^\beta} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \leq C_{jk} R^{-\frac{1}{2-\beta}} |x - y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}} t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}},$$

$$|x - y|^2 > 4t^\beta / R, \quad j = 1, 2, \quad c = (2 - \beta)\beta^{\beta(2-\beta)},$$

$C_k, C_k^*, C_{jk}, C_{jk}^*, \widehat{C}_{jk}$ ($j = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots$) — деякі додатні сталі.

Використовуватимемо спряжені оператори Гріна

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y, \tau) &= \int_{\tau}^T dt \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a)\varphi(x, t)dx, \\(\widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y) &= \int_0^T dt \int_0^l G_j(x, t, y, 0, a)\varphi(x, t)dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0), \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Як у [9] доводимо, що для кожної $\psi \in X(\bar{Q}_0)$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y, \tau) = \psi(y, t), \quad (y, t) \in \bar{Q}_0,$$

$$(\widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y) = \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y, t)dt, \quad y \in [0, l], \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

а при $a \in C_+^\infty[0, T]$

$$\widehat{\mathfrak{G}}_0 : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \rightarrow X(\bar{Q}_0), \quad \widehat{\mathfrak{G}}_j : \mathfrak{D}(\bar{Q}_0) \rightarrow C^\infty[0, l], \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Теорема 2. За припущення (A) існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\bar{Q}_0)$ першої крайової задачі (1)–(4). Розв'язок визначений за формулою

$$(u, \varphi) = (F, \widehat{\mathfrak{G}}_0\varphi) + \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{\mathfrak{G}}_j\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\bar{Q}_0). \quad (16)$$

Теорема доводиться за схемою доведення теореми 1 у [9] із використанням наведених вище властивостей (14) та (15) спряжених операторів Гріна.

Введемо оператори

$$\begin{aligned}(\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) &= \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a)\varphi(x)dx, \\(\widehat{G}_j\varphi)(y, t) &= \int_0^l G_j(x, t, y, 0, a)\varphi(x)dx, \quad j = 1, 2, \quad \varphi \in \mathfrak{D}[0, l].\end{aligned}$$

Лема 1. Нехай $a \in C_+[0, T]$. Тоді при $\max_{t \in [0, T]} [a(t)]^{-1} \leq R$, довільних $0 \leq \tau < t \leq T$ правильні оцінки

$$\begin{aligned}\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) \right| &\leq c_0 \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot (t - \tau)^{\beta/2 - 1} [\sqrt{R} + (t - \tau)^{\beta/2}], \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\widehat{G}_j\varphi)(y, t) \right| &\leq c_j \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot t^{j-1}, \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned} \quad (17)$$

а також

$$\begin{aligned}\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) \right| &\leq c_0^* \sqrt{R} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot (t - \tau)^{\beta/2 - 1}, \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\widehat{G}_j\varphi)(y, t) \right| &\leq c_j^* \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot [\sqrt{R} t^{j-1 - \beta/2} + t^{j-1}], \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned} \quad (18)$$

c_j, c_j^* ($j = 0, 1, 2$) — додатні сталі.

Доведення. Використовуючи оцінки головної функції Гріна, при $\varphi \in C[0, l]$ для всіх $t \in [0, T]$ знаходимо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi(x) dx \right| \\ & \leq \left(\int_{|x-y| < 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} |G_0(x, t, y, \tau, a)| dx + \int_{|x-y| > 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} |G_0(x, t, y, \tau, a)| dx \right) \cdot \|\varphi\|_{C[0, l]} \\ & \leq \left(\int_{|x-y| < 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} C_0^* R^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1} dx + \int_{|x-y| > 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \frac{C_0 (t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|} dx \right) \cdot \|\varphi\|_{C[0, l]} \\ & \leq (2C_0^* (t-\tau)^{\beta-1} + l \frac{C_0}{2} \sqrt{R} (t-\tau)^{\beta/2-1}) \|\varphi\|_{C[0, l]} \leq c_0 \|\varphi\|_{C[0, l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1} [\sqrt{R} + (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}], \end{aligned}$$

$c_0 = \text{const} > 0$ і при $\varphi \in C[0, l]$ для всіх $(y, \tau) \in \bar{Q}_0$, $t \in [0, T]$ функції $(G_0\varphi)(y, t, \tau)$ ($y \in [0, l]$, $0 \leq \tau < t \leq T$) є неперервними.

Оскільки $\left| \int_0^l \frac{\partial}{\partial y} G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi'(x) dx \right|$ при $\varphi \in C^1[0, l]$, то з попередньої оцінки одержуємо

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi(x) dx \right| \leq c_0 \|\varphi\|_{C^1[0, l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1} [\sqrt{R} + (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}}], \quad (19)$$

і при $\varphi \in C^1[0, l]$ для всіх $(y, \tau) \in \bar{Q}_0$, $t \in [0, T]$ функції $\frac{\partial}{\partial y} (G_0\varphi)(y, t, \tau)$ ($y \in [0, l]$, $0 \leq \tau < t \leq T$) є неперервними.

З іншого боку, застосовуючи оцінку похідної функції $G_0(x, t, y, \tau, a)$, при $\varphi \in C[0, l]$ для всіх $t \in [0, T]$ матимемо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi(x) dx \right| \\ & \leq \left(\int_{|x-y| < 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} C_1^* R (t-\tau)^{-1} dx + \int_{|x-y| > 2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \frac{C_1 (t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^2} dx \right) \cdot \|\varphi\|_{C[0, l]} \\ & \leq c_0^* \sqrt{R} \|\varphi\|_{C[0, l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}, \quad c_0^* = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Із оцінок (19) та (20) за допомогою інтегрування частинами знаходимо відповідно оцінки (17) та (18) для $\hat{G}_0\varphi$.

При $\varphi \in C[0, l]$, $j = 1, 2$, оцінимо

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k G_j(x, t, y, 0, a) \varphi(x) dx \right| & \leq \left[\int_{y-\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{y+\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}} dx \right. \\ & \left. + \int_{|x-y| > \frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} \frac{C_{jk} t^{j-1+\frac{\beta}{2-2\beta}}}{R^{\frac{1}{2-2\beta}} |y-x|^{1+\frac{2}{2-2\beta}}} dx \right] \cdot \|\varphi\|_{C[0, l]} \leq c_{jk}^* [\sqrt{R}^k t^{j-1-\frac{k\beta}{2}} + t^{j-1}] \cdot \|\varphi\|_{C[0, l]}, \end{aligned}$$

$c_{jk}^* = \text{const} > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а, отже, при $\varphi \in C[0, l]$ функції $(G_j\varphi)(y, \tau)$ неперервні в \bar{Q}_0 , $j = 1, 2$.

Використовуючи одержані оцінки при $k = 0$ ($k = 1$) та інтегрування частинами, як вище, знаходимо оцінки (17) (відповідно (18)) для випадку $j = 1, 2$. \square

Теорема 3. За припущення (B) існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0}) \cap C[0, T]$ першої крайової задачі (1)–(4), він визначений за формулою

$$(u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = \int_0^t g(\tau)(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau))d\tau + \sum_{j=1}^2 (F_j(\cdot), (\widehat{G}_j\varphi)(\cdot, t, \tau)) \quad (21)$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}[0, l], \quad t \in [0, T].$$

Доведення. Тепер $F(x, t) = F_0(x) \cdot g(t)$ — прямий добуток узагальнених функцій $F_0 \in \mathfrak{D}'[0, l]$, $g \in C[0, T]$. Ясно, що така узагальнена функція належить $\mathfrak{D}'(\overline{Q_0})$ (навіть $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0}) \cap C[0, T]$, оскільки для $g \in C[0, T]$ та довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$ функція $(F_0(x) \cdot g(t), \varphi(x)) = (F_0, \varphi)g(t)$ є неперервною на $[0, T]$). Тому за теоремою 2 при $a \in C_+^\infty[0, T]$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0})$ першої крайової задачі (1)–(4), визначений за формулою (16). Покажемо існування розв'язку $u \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0}) \cap C[0, T]$ цієї задачі за припущення (B) та що для нього правильне зображення (21).

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченний порядок сингулярності [10]: існують такі цілі числа k_0, k_1, k_2 та функції $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0, l)$, що

$$(F_j(y), \varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi(y) dy \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0, l], \quad j = 0, 1, 2. \quad (22)$$

Використовуючи зображення (22) та лему 1, переконуємося, що для довільної $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$ функції у правій частині формули (21)

$$\int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau))d\tau = \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^t g(\tau) \left[\int_0^l g_{0k}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) dy \right] d\tau,$$

$$(F_j(y), (\widehat{G}_j\varphi)(y, t)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_j\varphi)(y, t) dy, \quad j = 1, 2,$$

неперервні на $[0, T]$, та правильні оцінки

$$\left| \int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau))d\tau \right|$$

$$\leq c_0 \sum_{k=0}^{k_0} \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \left[\int_0^l |g_{0k}(y)| dy \right] \left[(t - \tau)^{\beta-1} + \sqrt{R}(t - \tau)^{\beta/2-1} \right] d\tau \leq b_0 t^{\beta/2},$$

$$|(F_j(y), (\widehat{G}_j\varphi)(y, t))| \leq c_j \sum_{k=0}^{k_j} \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{jk}(y)| dy = b_j t^{j-1}, \quad j = 1, 2,$$

b_j ($j = 0, 1, 2$) — деякі додатні сталі. Отже, права частина у формулі (21) визначена та функція (21) неперервна за змінною $t \in [0, T]$.

Покажемо, що функція (21) задовольняє тотожність (5). За лемою 1 при довільних $0 \leq \tau < t \leq T$, $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$, маємо $(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot, t, \tau) \in \mathfrak{D}[0, l]$, а також $(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(\cdot, t, \tau) \in \mathfrak{D}[0, l]$ для кожної $\psi \in X(\overline{Q_0})$, та визначено $(u, \widehat{L}\psi) = \int_0^T (u(\cdot, t), (\widehat{L}\psi)(\cdot, t)) dt$. Згідно з формулою (21),

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (u(\cdot, t), (\widehat{L}\psi)(\cdot, t)) dt \\
&= \int_0^T \left(\int_0^t g(\tau) (F_0(y), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau)) d\tau \right) dt + \sum_{j=1}^2 \int_0^T (F_j(y), (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau)) dt \\
&= (F_0(y), \int_0^T \left(\int_0^t g(\tau) (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau) d\tau \right) dt) + \sum_{j=1}^2 \int_0^T (F_j(y), (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau)) dt \\
&= (F_0(y), \int_0^T g(\tau) \left(\int_\tau^T \widehat{G}_0(\widehat{L}\psi)(y, t, \tau) dt \right) d\tau) + \sum_{j=1}^2 (F_j(y), \int_0^T (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y, t, \tau) dt) \\
&= (F_0(y) \cdot g(\tau), (\widehat{\mathfrak{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y, \tau)) + \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{\mathfrak{G}}_j(\widehat{L}\psi)).
\end{aligned}$$

Скориставшись формулами (14) (правильними при $a \in C_+[0, T]$), одержуємо

$$(u, \widehat{L}\psi) = (F_0(y) \cdot g(\tau), \psi(y, \tau)) + \sum_{j=1}^2 \left(F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t) \psi(\cdot, t) dt \right) \quad \forall \psi \in X(\overline{Q}_0),$$

тобто тотожність (5). За означенням функція (21) є розв'язком задачі (1)–(4) шуканого класу. Єдиність розв'язку задачі доводиться як у [9]. \square

Наслідок 2. За умов теореми 3 також усі похідні $(\frac{\partial}{\partial x})^k u$, $k = 1, 2, \dots$, розв'язку задачі неперервні за змінною $t \in [0, T]$: $((\frac{\partial}{\partial x})^k u(x, \cdot), \varphi(x)) \in C[0, T]$ для кожної $\varphi \in \mathfrak{D}(0, l)$.

Зауваження 1. Для рівняння (1) з загальнішим вільним членом — узагальненою функцією $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T]$ (замість $F_0 \cdot g$), при $F_j \in \mathfrak{D}'[0, l]$, $j = 1, 2$, та навіть $a \in C_+^\infty[0, T]$ таким способом не можемо довести, що розв'язок задачі (1)–(4) належить $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T]$. Справді, тепер використовуємо зображення

$$(F(y, \tau), \varphi(y, \tau)) = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{p=0}^{P_0} \int_0^T d\tau \int_0^l g_{0kp}(y, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^p \varphi(y, \tau) dy \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$$

із деякими $g_{0kp} \in L_1(\overline{Q}_0)$, $k = 0, \dots, K_0$, $p = 0, \dots, P_0$. Однак при $P_0 > 0$ та $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$ функції $(\frac{\partial}{\partial \tau})^p (\widehat{G}_0 \varphi)(y, t, \tau)$ мають загалом неінтегровні особливості.

Зауваження 2. Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Результати поширюються на випадок $Q_0 = \Omega \times (0, T]$, де Ω — обмежена область в \mathbb{R}^N , $N \geq 2$.

REFERENCES

- [1] Caputo M. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II*. Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967, **13**, 529–539. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
- [2] Djrbashian M. M. *Integral transformations and representations of functions in complex domain*. Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)
- [3] Sheng D. J. *Time- and space-fractional partial differential equations*. J. Math. Phys. 2005, **46** (1), 13504–13511. doi:10.1063/1.1819524

- [4] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.
- [5] Ivasyshen S.D. Green matrices of parabolic boundary value problems. Vyshcha shkola, Kyiv, 1990. (in Russian)
- [6] Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms: theory and applications. In: Prudnikov A.P., Dunkl C.F., Glaeske H.-J., Saigo M. (Eds.) Analytical Methods and Special Functions, 9. Chapman and Hall/CRC, London-Washington, 2004.
- [7] Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*. Differential Equations 1990, **26**, 485–492. (in Russian)
- [8] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Equations of one-dimensional fractional-order diffusion*. Dop. NAS of Ukraine 2003, **12**, 11–16. (in Russian)
- [9] Lopushans'ka H.P., Lopushans'kyi A.O. *Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*. Ukrainian Math. J. 2013, **64** (8), 1215–1230. doi:10.1007/s11253-013-0711-z (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 2012, **64** (8), 1067–1079)
- [10] Shilov G.E. Mathematical Analysis. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)
- [11] Titchmarsh E. The Theory of Functions. Oxford University Press, USA, 1976.
- [12] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1981. (in Russian)
- [13] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative*. Dokl. Ak. Nauk 2007, **414** (4), 1–4. (in Russian)

Надійшло 18.09.2013

Lopushanskyj A.O. *Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 279–289.

We prove the unique solvability of the first boundary value problem of equation

$$u_t^{(\beta)} - a(t)\Delta u = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0, 2)$, positive smooth coefficient $a(t)$ and generalized functions in right-hand sides. We obtain some sufficient conditions of the regularity of its solution as variable t .

Key words and phrases: fractional derivative, generalized function, boundary value problem, Green vector-function.

Лопушанський А.О. *Регулярність рішень крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах* // Карпатські математическі публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 279–289.

Доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнения

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

с дробной производной $u_t^{(\beta)}$ Римана-Лиувилля порядка $\beta \in (0, 2)$, положительным гладким коэффициентом $a(t)$, обобщенными функциями в правых частях и установлено некоторые достаточные условия регулярности ее решения по переменной t .

Ключевые слова и фразы: производная дробного порядка, обобщенная функция, краевая задача, вектор-функция Грина.