

ПРОЦАХ Н.П.

**АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ**

Розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множителем правої частини цього рівняння. Знайдено умови, за яких узагальнений розв'язок задачі прямує до нуля при зростанні часової змінної.

*Ключові слова і фрази:* обернена задача, ультрапараболічне рівняння, узагальнений розв'язок.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine  
E-mail: [protsakh@ukr.net](mailto:protsakh@ukr.net)

## ВСТУП

Ультрапараболічні рівняння вперше введені у праці [5] для опису неізотропних процесів. Пізніше їх застосовували до вивчення багатьох явищ механіки, біології, фізики, економіки [2, 7]. Вивченню задачі Коші, мішаних задач та властивостей їх розв'язків присвячені, зокрема, праці [2, 8, 10, 11, 12].

Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за відомими їх наслідками. З математичної точки зору це означає знаходження невідомих коефіцієнтів рівняння чи його правої частини за додаткових умов на розв'язок цього рівняння.

Існування та єдиність розв'язку обернених задач для параболічних, гіперболічних чи ультрапараболічних рівнянь встановлено, зокрема, у працях [1, 3, 4, 6, 9, 11, 14]. При цьому використовувалися: метод інтегральних рівнянь та принцип Шаудера [3, 4, 6], ітеративні методи [14], метод послідовних наближень [1, 11], метод напівгруп [9]. У праці [15] показано, що розв'язок оберненої задачі з невідомою правою частиною для параболічного рівняння спадає до нуля при зростанні часової змінної за певних умов на вихідні дані задачі.

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множителем правої частини цього рівняння. Встановлено умови, за яких розв'язок спадає до нуля при зростанні часової змінної. Зауважимо, що властивості розв'язків прямих мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь раніше вивчалися у працях [8, 12].

УДК 517.95

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 35R30.

1 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОСТОРИ

Нехай  $\Omega$  і  $D$  — обмежені області відповідно в  $\mathbb{R}^n$  і  $\mathbb{R}^l$  з межами  $\partial\Omega \in C^1$  і  $\partial D \in C^1$ ;  $x \in \Omega$ ,  $y \in D$ ,  $t \in (0, T)$ , де  $T$  — фіксоване число з інтервалу  $(0, \infty)$ ,  $Q_T = \Omega \times D \times (0, T)$ ,  $G = \Omega \times D$ .

Позначимо:  $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0, T)$ ,  $S_T = \Omega \times \partial D \times (0, T)$ ,  $G_\xi = \{(x, y, t) : (x, y) \in G, t = \xi\}$ ,  $\xi \in [0, T]$ .

Введемо простори:  $L^\infty(Q_T) := \{w : Q_T \rightarrow \mathbb{R}; w \text{ — вимірна та існує така стала } C, \text{ що } |w(x, y, t)| \leq C \text{ майже всюди на } Q_T\}$ ,  $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x, y, t)| \leq C \text{ майже всюди на } Q_T\}$ ;  $L^2(G) := \{w : G \rightarrow \mathbb{R}; w \text{ — вимірна, } \int_G |w(x, y)|^2 dx dy < \infty\}$ ,  $\|w; L^2(G)\| = (\int_G |w(x, y)|^2 dx dy)^{\frac{1}{2}}$ ;  $L^2(0, T) := \{w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}; w \text{ — вимірна, } \int_0^T |w(t)|^2 dt < \infty\}$ ,  $\|w; L^2(0, T)\| = (\int_0^T |w(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ ;  $L^2(Q_T) := \{w : Q_T \rightarrow \mathbb{R}; w \text{ — вимірна, } \int_{Q_T} |w(x, y, t)|^2 dx dy dt < \infty\}$ ,  $\|w; L^2(Q_T)\| = (\int_{Q_T} |w(x, y, t)|^2 dx dy dt)^{\frac{1}{2}}$ ;  $W^{1,2}(\cdot)$  — множина всіх розподілів  $w$ , які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору  $L^2(\cdot)$ ,  $\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = (\int_\Omega [|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x)|^2] dx)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\|w; W^{1,2}(0, T)\| = (\int_0^T [|w(t)|^2 + |w_t(t)|^2] dt)^{\frac{1}{2}}$ ;  $C^k(O)$  — простір  $k$  раз неперервно диференційовних функцій на  $O$ ;  $V(0, T; W(G)) := \{w : [0, T] \rightarrow W(G); \|w(\cdot, \cdot, t); W(G)\| \in V(0, T)\}$  (де  $V, W$  — банахові простори);  $W_0^{1,2}(\Omega) := \{w : w \in W^{1,2}(\Omega), w|_{\partial\Omega} = 0\}$ ;  $V_1(Q_T) := \{w : w, w_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1, \dots, n, w|_{\Sigma_T} = 0\}$ ;  $V_2(G) := L^2(D; W_0^{1,2}(\Omega)) = \{w : D \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega); \|w(\cdot, y); W_0^{1,2}(\Omega)\| \in L^2(D)\}$ ,  $\|w; V_2(G)\| = (\int_G [|w(x, y)|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x, y)|^2] dx dy)^{\frac{1}{2}}$ ;  $V_3(Q_T) := \{w : w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l, w|_{S_T^1} = 0, w|_{\Sigma_T} = 0\}$ . Позначимо через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  скалярний добуток між просторами  $V_2^*(G)$  і  $V_2(G)$ .

Використовуватимемо такі нерівності:

"нерівність з  $\varepsilon$ ":

$$|yz| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|y|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|z|^2, \quad \varepsilon, y, z \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

нерівність Фрідрікса:

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq \varkappa \int_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x)|^2 dx, \tag{2}$$

яка виконується для функцій  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , а стала  $\varkappa$  залежить від  $\Omega$ .

2 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

В області  $Q_T$  розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, y, t) u_{x_i})_{x_j} + c(x, y, t) u + g(x, y, t, u) = f(x, y, t) f_0(t) \tag{3}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G, \tag{4}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \quad u|_{S_T^1} = 0 \tag{5}$$

та умовою перевизначення

$$\int_{G_t} K(x, y)u(x, y, t) dx dy = E(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

де  $u(x, y, t)$ ,  $f_0(t)$  — невідомі функції,  $S_T^1 = \{(x, y, t) \in S_T : \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) < 0\}$ ,  $\nu$  — одинична зовнішня нормаль до  $S_T$ , причому припускаємо, що виконується умова

(S): Існує така поверхня з додатною мірою Лебега  $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$ , що  $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0, T)$ .

Нехай також виконуються умови

- (A):  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{ij}(x, y, t) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$  для майже всіх  $(x, y, t) \in Q_T$  та для всіх  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_0$  — додатна стала;
- (C):  $c \in C([0, T]; L^\infty(G))$ ,  $c(x, y, t) \geq c_0$  для майже всіх  $(x, y, t) \in Q_T$ ,  $c_0$  — стала;
- (E):  $E \in W^{1,2}(0, T)$ ;
- (F):  $f \in C([0, T]; L^2(G))$ ;
- (H):  $g(x, y, t, \xi)$  вимірна за змінними  $(x, y, t)$  в області  $Q_T$  для всіх  $\xi \in \mathbb{R}^1$  і неперервна за  $\xi$  для майже всіх  $(x, y, t) \in Q_T$ ; існує така додатна стала  $g^0$ , що  $|g(x, y, t, \xi) - g(x, y, t, \eta)| \leq g^0 |\xi - \eta|$  для майже всіх  $(x, y, t) \in Q_T$  та всіх  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$ ;
- (K):  $K \in C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$ ,  $K|_{\partial\Omega \times D} = 0$ ,  $K|_{\Omega \times \Gamma_2} = 0$ , де  $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$ ;
- (L):  $\lambda_i \in C(Q_T)$ ,  $\lambda_{iy_i} \in C([0, T]; L^\infty(G))$  для всіх  $i = 1, \dots, l$ ;
- (U):  $u_0, u_{0,y_j} \in L^2(G)$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $u_0|_{\partial\Omega \times D} = 0$ ,  $u_0|_{\Omega \times \Gamma_1} = 0$ .

### 3 ОЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

**Означення 1.** Пару функцій  $(u(x, y, t), f_0(t))$  назвемо узагальненим розв'язком задачі (3)–(6), якщо  $u \in V_3(Q_T) \cap C([0, T]; L^2(G))$ ,  $u_t \in L^2(0, T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(0, T)$ , і ці функції для всіх  $v \in V_1(Q_T)$  задовольняють інтегральну рівність

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle dt + \int_{Q_T} \left[ \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} v_{x_j} + c(x, y, t) uv + g(x, y, t, u) v \right] dx dy dt = \int_{Q_T} f(x, y, t) f_0(t) v dx dy dt$$

і, крім того, функція  $u(x, y, t)$  задовольняє умови (4) та (6).

Нехай  $\int_{G_t} K(x, y) f(x, y, t) dx dy \neq 0$ . Із рівняння (3) та умови (6) випливає, що узагальнений розв'язок задачі (3)–(6) задовольняє рівність

$$\left[ \int_{G_t} K(x, y) f(x, y, t) dx dy \right] f_0(t) = E'(t) + \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} u + \sum_{i,j=1}^n K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} + K(x, y) c(x, y, t) u + K(x, y) g(x, y, t, u) \right) dx dy, \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

4 АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

Введемо позначення:  $f_1 = \max_{[0,T]} (\int_{G_t} (f(x,y,t))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}}$ ,  $K_1(t) = \int_{G_t} K(x,y) f(x,y,t) dx dy$ ,  $\lambda^1 = \max_i \sup_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$ ,  $c^0 = \sup_{[0,T]} (\sup_{G_t} |c(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\Lambda^1 = \max \left\{ \sup_{[0,T]} \max_i (\sup_{G_t} |\lambda_i(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}}; \sup_{[0,T]} \sum_{i=1}^l (\text{ess sup}_{G_t} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$ ,  $a_1 = \max_{ij} \text{ess sup}_{[0,T]} (\text{ess sup}_{G_t} |a_{ij}(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_0$  — додатна стала.

Нехай  $\sum_{i=1}^n (\int_G (K_{x_i}(x,y))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^l (\int_G (K_{y_i}(x,y))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}} + (\int_G (K(x,y))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}} \leq K_1$ , де  $K_1 \in \mathbb{R}$ ,  $(\int_{G_t} |g(x,y,t,0)|^2 dx dy)^{\frac{1}{2}} \leq g^1(t)$  для всіх  $t > 0$ , де  $g^1 \in L^2(0,T)$ . Позначимо

$$\beta = \frac{a_0}{\varkappa} + 2c_0 - \lambda^1 - 2g^0 - \frac{2f_1 K_1 (g^0 + \Lambda_1 + c^0)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{a_0 k_0^2} - 1,$$

$$\delta(t) = 3 \left( 1 + \frac{f_1^2 K_1^2}{k_0^2} \right) (g^1(t))^2 + \frac{3|E'(t)|^2 f_1^2}{k_0^2}.$$

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та  $|K_1(t)| \geq k_0 > 0$  для всіх  $t > 0$  і  $\beta > 0$ . Нехай  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} |E'(\tau)|^2 d\tau = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} |g^1(t)|^2 dt = 0$ .*

Тоді для узагальненого розв'язку  $(u(x,y,t), f_0(t))$  задачі (3)–(6) виконуються такі збіжності:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, \cdot, t); L^2(G)\| = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} \int_G \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} |f_0(t)|^2 dt = 0$ .

*Доведення.* У праці [13] доведено, що за умов теореми існує єдина функція  $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ ,  $u_t \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$ , яка є узагальненим розв'язком задачі (3)–(6). З рівності (7) та рівняння (3) випливає рівність

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t) u + g(x,y,t,u) \\ = \frac{f(x,y,t)}{K_1(t)} \left( E'(t) + \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} u \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} + K(x,y) c(x,y,t) u + K(x,y) g(x,y,t,u) \right) dx dy \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Домножимо (8) на  $u$  та проінтегруємо по  $G_t$ :

$$\begin{aligned} \int_{G_t} \left[ u_t u + \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} u_{x_j} + c(x,y,t) |u|^2 + g(x,y,t,u) u \right] dx dy \\ = \frac{1}{K_1(t)} \left( \int_{G_t} E'(t) f(x,y,t) u dx dy + \int_{G_t} f(x,y,t) u dx dy \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} u \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} + K(x,y) c(x,y,t) u + K(x,y) g(x,y,t,u) \right) dx dy \right), t > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Оцінимо окремо доданки рівності (9), використавши умови (А)–(L).

$$\mathcal{I}_1 := \int_{G_t} u_t u \, dx \, dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right);$$

$$\mathcal{I}_2 := \int_{G_t} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) u_{y_i} u \, dx \, dy \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(v, y_i) \, d\sigma \, dx - \frac{\lambda^1}{2} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy;$$

$$\mathcal{I}_3 := \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} u_{x_j} \, dx \, dy \geq a_0 \int_{G_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \, dx \, dy;$$

$$\mathcal{I}_4 := \int_{G_t} c(x, y, t) |u|^2 \, dx \, dy \geq c_0 \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy;$$

$$\mathcal{I}_5 := \int_{G_t} g(x, y, t, u) u \, dx \, dy \leq g^0 \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy + g^1(t) \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\mathcal{I}_6 := \frac{E'(t)}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \leq \frac{|E'(t)|}{k_0} f_1 \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_7 := -\frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \int_{G_t} \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} u \, dx \, dy \leq \frac{f_1 \Lambda_1 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_8 := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^n K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} \, dx \, dy \\ \leq \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left( \int_{G_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_9 := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \int_{G_t} K(x, y) c(x, y, t) u \, dx \, dy \leq \frac{f_1 c^0 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{10} := \frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \int_{G_t} K(x, y) g(x, y, t, u) \, dx \, dy \\ \leq \frac{f_1 g^0 K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy + \frac{f_1 g^1(t) K_1}{k_0} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Враховувавши оцінки доданків  $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_{10}$ , з (9) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, v_i) \, d\sigma \, dx + \int_{G_t} \left( a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right. \\ \left. + (c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0) |u|^2 \right) \, dx \, dy \leq \frac{|E'(t)| f_1 + g^1(t) (k_0 + f_1 K_1)}{k_0} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \quad (10) \\ + \frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy + \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left( \int_{G_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$t > 0$ . Використавши в (10) нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, v_i) \, d\sigma \, dx + \int_{G_t} \left[ \frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right. \\ \left. + \left( c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 - \frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{2 a_0 k_0^2} - \frac{1}{2} \right) |u|^2 \right] \, dx \, dy \leq \frac{\delta(t)}{2}, \quad t > 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Застосувавши в (11) нерівність (2), отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 dx dy \right) + \beta \int_{G_t} |u|^2 dx dy \leq \delta(t), \quad t > 0. \quad (12)$$

Проінтегрувавши нерівність (12), знайдемо

$$\int_{G_t} |u|^2 dx dy \leq e^{-\beta t} \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (13)$$

Проінтегруємо (10) по  $t$  від  $k$  до  $k+1$ , де  $k \in \mathbb{N}$ . Врахувавши, що

$$\frac{1}{2} \int_{G_{k+1}} |u|^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, \nu_i) d\sigma dx dt > 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} a_0 \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt + (c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0) \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt &\leq \frac{1}{2} \int_{G_k} |u|^2 dx dy \\ + \left( \frac{f_1}{k_0} \left( \int_k^{k+1} |E'(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left( 1 + \frac{f_1 K_1}{k_0} \right) \left( \int_k^{k+1} |g^1(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right) &\left( \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \\ + \frac{f_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1) K_1}{k_0} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt & \\ + \frac{f_1 \sqrt{na_1} K_1}{k_0} \left( \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt \right)^{1/2} &\left( \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $Q_{k,k+1} = G \times (k, k+1)$ . Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{f_1 \sqrt{na_1} K_1}{k_0} \left( \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \left( \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \\ \leq \frac{a_0}{2} \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt + \frac{f_1^2 na_1^2 K_1^2}{2a_0 k_0^2} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt, \end{aligned}$$

то з (14) випливає нерівність

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \leq \frac{1}{a_0} \int_{G_k} |u|^2 dx dy + \beta_1 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt + \mu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

де  $\beta_1 = \frac{1}{a_0} \left( \frac{2f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1)K_1}{k_0} + \frac{f_1^2 na_1^2 K_1^2}{a_0 k_0^2} + 3 + \lambda^1 + 2g^0 + 2|c^0| \right)$ ,  $\mu(k) = \frac{2}{a_0} \left( \left( 1 + \frac{f_1^2 K_1^2}{k_0^2} \right) \int_k^{k+1} |g^1(t)|^2 dt + \frac{f_1^2}{k_0^2} \int_k^{k+1} |E'(t)|^2 dt \right)$ . Проінтегрувавши (13) по  $t$  від  $k$  до  $k+1$ , де  $k \in \mathbb{N}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt &\leq \frac{1}{\beta} e^{-\beta k} (1 - e^{-\beta}) \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy \\ &+ \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta}) \int_0^k e^{\beta(t-k)} \delta(t) dt - \frac{1}{\beta} \int_k^{k+1} e^{-\beta(k+1-t)} \delta(t) dt + \frac{1}{\beta} \int_k^{k+1} \delta(t) dt. \end{aligned}$$

Тоді з (15) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \leq \mu_1(k) + \mu(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

де

$$\mu_1(k) = \left( \frac{1}{a_0} + \frac{\beta_1}{\beta} (1 - e^{-\beta}) \right) \left[ e^{-\beta k} \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy + \int_0^k e^{-\beta(k-\tau)} \delta(\tau) d\tau \right] + \frac{\beta_1}{\beta} \int_k^{k+1} (1 - e^{-\beta(k+1-t)}) \delta(t) dt.$$

Із формули (7) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} |f_0(t)|^2 dt &\leq \frac{2}{k_0^2} \int_k^{k+1} |E'(t)|^2 dt + 6 \max_{t \in [k, k+1]} \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} \right. \\ &\quad \left. + K(x, y) c(x, y, t) + K(x, y) g^0 \right)^2 dx dy \int_{Q_{k, k+1}} |u|^2 dx dy dt \\ &\quad + \frac{6a_1^2 K_1^2 n}{k_0^2} \int_{Q_{k, k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt + \frac{6K_1^2}{k_0^2} \int_{Q_{k, k+1}} |g^1(t)|^2 dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Із (13) отримуємо нерівність

$$\int_{G_t} |u|^2 dx dy \leq e^{-\beta t} \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy + \sum_{0 \leq k \leq [t]} e^{-\beta(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau) d\tau. \quad (18)$$

З умов теореми випливає, що  $\sum_{0 \leq k \leq [t]} e^{-\beta(t-k)} \int_k^{k+1} \delta(\tau) d\tau \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Тоді з (18) знайдемо, що  $\int_{G_t} |u|^2 dx dy \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Оскільки  $\mu(k) \rightarrow 0$ ,  $\mu_1(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то з (16) та з (17) випливає, що  $\int_{Q_{k, k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \rightarrow 0$  і  $\int_k^{k+1} |f_0(t)|^2 dt \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

Нехай  $a_2 = \max_{ij} \sup_{[0, T]} (\text{ess sup}_{G_t} |a_{ijx_i}|^2)^{1/2}$ ,  $\sum_{i, j=1}^n \left| \int_G (K_{x_i x_i}(x, y))^2 dx dy \right|^{1/2} \leq K_1$ ,  $\beta_2 = \frac{2a_0}{\varkappa} + 2c_0 - \lambda^1 - 2g^0 - \frac{2f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2 n + a_1) K_1}{k_0} - 1$ .

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та  $a_{ij}, a_{ijx_i} \in C([0, T]; L^\infty(G))$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $E' \in C([0, T])$ ,  $K \in C^1(D; C^2(\Omega))$ ,  $g^1 \in C([0, T])$  і, крім того,  $|K_1(t)| \geq k_0 > 0$  для всіх  $t > 0$  та  $\beta_2 > 0$ . Нехай  $\lim_{t \rightarrow \infty} |E'(t)| = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |g^1(t)| = 0$ .

Тоді  $f_0 \in C([0, T])$  та для узагальненого розв'язку задачі (3)–(6) виконуються такі збіжності

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, \cdot, t); L^2(G)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} \int_G \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |f_0(t)| = 0.$$

*Доведення.* Використаємо доведення теореми 1. Для розв'язку задачі (3)–(6) так само, як у випадку теореми 1, використаємо рівності (7) та (8), записавши їх у вигляді

$$\begin{aligned} f_0(t) &= (K_1(t))^{-1} \left( E'(t) + \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} u - \sum_{i, j=1}^n (K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t))_{x_i} u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + K(x, y) c(x, y, t) u + K(x, y) g(x, y, t, u) \right) dx dy \right), \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (19)$$

та

$$\begin{aligned} u_t &+ \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) u_{y_i} - \sum_{i, j=1}^n (a_{ij}(x, y, t) u_{x_i})_{x_j} + c(x, y, t) u + g(x, y, t, u) \\ &= f(x, y, t) (K_1(t))^{-1} \left( E'(t) + \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i, j=1}^n (K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t))_{x_i} u + K(x, y) c(x, y, t) u + K(x, y) g(x, y, t, u) \right) dx dy \right). \end{aligned} \quad (20)$$

За умов теореми всі функції правої частини рівності (19) неперервні за змінною  $t$  на  $[0, T]$ , тому  $f_0 \in C([0, T])$ . Домножимо рівність (20) на  $u$  та поінтегруємо її по  $G_t$ . Оскільки

$$-\frac{1}{K_1(t)} \int_{G_t} f(x, y, t) u \, dx \, dy \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^n (K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t))_{x_i} u \, dx \, dy \leq \frac{f_1(na_2 + a_1)K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy,$$

а оцінки інших доданків з (20) повторюють оцінки  $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_7, \mathcal{I}_9, \mathcal{I}_{10}$ , то з (20) випливає

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, \nu_i) \, d\sigma \, dx + \int_{G_t} \left[ a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right. \\ & \left. + \left( c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 \right) |u|^2 \right] \, dx \, dy \leq \left( g^1(t) + \frac{f_1(|E'(t)| + g^1(t)K_1)}{k_0} \right) \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21) \\ & + \frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2n + a_1)K_1}{k_0} \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Використавши в (21) нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, \nu_i) \, d\sigma \, dx + \int_{G_t} \left( a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right. \\ & \left. + \left( c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 - \frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2n + a_1)K_1}{k_0} - \frac{1}{2} \right) |u|^2 \right) \, dx \, dy \leq \frac{\delta(t)}{2}, \quad t > 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Із (22) та нерівності Фрідрікса випливає оцінка

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \right) + \beta_2 \int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \leq \delta(t), \quad t > 0. \quad (23)$$

Проінтегрувавши (23), отримуємо нерівності

$$\int_{G_t} |u|^2 \, dx \, dy \leq e^{-\beta_2 t} \int_{G_0} |u_0|^2 \, dx \, dy + \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} \delta(\tau) \, d\tau, \quad t > 0, \quad (24)$$

та

$$\begin{aligned} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx \, dy \, dt & \leq \frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_2 k} (1 - e^{-\beta_2}) \int_{G_0} |u_0|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{\beta_2} (1 - e^{-\beta_2}) \int_0^k e^{\beta_2(t-k)} \delta(t) \, dt \\ & - \frac{1}{\beta_2} \int_k^{k+1} e^{-\beta_2(k+1-t)} \delta(t) \, dt + \frac{1}{\beta_2} \int_k^{k+1} \delta(t) \, dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши (21) по  $t$  від  $k$  до  $k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , та врахувавши, що  $\frac{1}{2} \int_{G_{k+1}} |u|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x, y, t) |u|^2 \cos(y_i, \nu_i) \, d\sigma \, dx \, dt > 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} & a_0 \int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \, dx \, dy \, dt + \left( c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 \right) \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx \, dy \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{G_k} |u|^2 \, dx \, dy \\ & + \left( \left( 1 + \frac{f_1 K_1}{k_0} \right) \left( \int_k^{k+1} |g^1(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} + \frac{f_1}{k_0} \left( \int_k^{k+1} |E'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \right) \left( \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx \, dy \, dt \right)^{1/2} \quad (25) \\ & + \frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2n + a_1)K_1}{k_0} \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx \, dy \, dt. \end{aligned}$$



Тоді з (25) випливає

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \leq \frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 dx dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt + \mu_2(k), \quad (26)$$

де

$$\beta_3 = \frac{1}{a_0} \left( \frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2 n + a_1) K_1}{k_0} + \frac{3}{2} + |c_0| + \frac{\lambda^1}{2} + g^0 \right), \quad \mu_2(k) = \frac{\mu(k)}{2}.$$

Зауважимо, що  $\frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 dx dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 dx dy dt \leq \mu_3(k)$ , де

$$\begin{aligned} \mu_3(k) = \left( \frac{1}{2a_0} + \frac{\beta_3}{\beta_2} (1 - e^{-\beta_2}) \right) & \left[ e^{-\beta_2 k} \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy + \int_0^k e^{-\beta_2(k-\tau)} \delta(\tau) d\tau \right] \\ & + \frac{\beta_3}{\beta_2} \int_k^{k+1} (1 - e^{-\beta_2(k+1-t)}) \delta(t) dt. \end{aligned}$$

Тоді з (26) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \leq \mu_2(k) + \mu_3(k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Із (19) також випливає, що

$$\begin{aligned} |f_0(t)| \leq \frac{1}{k_0} |E'(t)| + \frac{K_1}{k_0} |g^1(t)| + \frac{1}{k_0} \max_{t>0} \left( \int_{G_t} \left( - \sum_{i=1}^l (\lambda_i(x, y, t) K(x, y))_{y_i} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{i,j=1}^n (K_{x_j}(x, y) a_{ij}(x, y, t))_{x_i} + K(x, y) c(x, y, t) + K(x, y) g^0 \right)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{G_t} |u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Запишемо (24) у вигляді

$$\int_{G_t} |u|^2 dx dy \leq e^{-\beta_2 t} \int_{G_0} |u_0|^2 dx dy + \sum_{0 \leq k \leq [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau) d\tau. \quad (29)$$

З умов теореми випливає, що  $\sum_{0 \leq k \leq [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau) d\tau \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Тоді з (29) отримуємо

$$\int_{G_t} |u|^2 dx dy \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Зауважимо, що  $\mu_2(k) \rightarrow 0$ ,  $\mu_3(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тому з (27) і (28) випливає, що

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx dy dt \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad |f_0(t)| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad \square$$

#### REFERENCES

- [1] Beilina N.V. On solvability of a inverse problem for hyperbolic equation with an integral overdetermination condition. Vestnik Samara Univ. 2011, 23 (2), 34–39. (in Russian)
- [2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. doi:10.1007/978-3-0348-7844-9

- [3] Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. In: *Mathematical Studies, Monograph Series*, **10**. VNTL Publishers, L'viv, 2003.
- [4] Kamynin V.L. *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition*. *Math. Notes* 2005, **77** (4), 482–493. doi:10.1007/s11006-005-0047-6
- [5] Kolmogoroff A.N. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*. *Ann. Math.* 1934, **35**, 116–117. doi:10.2307/1968123
- [6] Kozhanov A.I. *An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II*, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2003, **11** (5), 505–522. doi: 10.1163/156939403770888246
- [7] Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S. Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance. In: *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II*. *International Mathematical Series*, **2**, 243–265. Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
- [8] Lavrenyuk S., Protsakh N. *Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain*. *Tatra Mt. Math. Publ.* 2007, **38**, 131–146.
- [9] Lorenzi A., Prilepko A.I. *Global existence results for first-order integrodifferential Identification problems*. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 1996, **96**, 51–84.
- [10] Malys'ka H.P. *Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations*. *Differential Equations* 2010, **46** (5), 753–757. doi:10.1134/S0012266110050150
- [11] Protsakh N. *Inverse problem for an ultraparabolic equation*. *Tatra Mt. Math. Publ.* 2013, **54**, 133–151. doi:10.2478/tmmp-2013-0011
- [12] Protsakh N. *Properties of a solution of the mixed problem for an ultraparabolic equation with the memory term*. *J. Math. Sci.* 2012, **183** (6), 823–834. doi:10.1007/s10958-012-0843-y
- [13] Protsakh N.P. *Inverse problem for semilinear ultraparabolic equation with unknown right-hand side function*. *Ukr. Math. J.* (in print).
- [14] Vabishchevich P.N. *Numerical solution of the problem of the identification of the right-hand side of a parabolic equation*. *Russian Math. (Iz. VUZ)* 2003, **47** (1), 27–35.
- [15] Vasin A.I., Kamynin V.L. *On the asymptotic behavior of solutions of inverse problems for parabolic equations*. *Siberian Math. J.* 1997, **38** (4), 647–662. doi: 10.1007/BF02674572

Надійшло 03.07.2013

---

Protsakh N.P. *Asymptotic behavior of solution of the inverse problem for weakly nonlinear ultraparabolic equation*. *Carpathian Mathematical Publications* 2013, **5** (2), 326–335.

The inverse problem with the integral overdetermination condition for a weakly nonlinear ultraparabolic equation with unknown time-dependent multiplier of the right-hand side of the equation is considered. The conditions when a weak solution decreases to zero as the time variable increases are found.

*Key words and phrases:* inverse problem, ultraparabolic equation, generalized solution.

Процак Н.П. *Асимптотическое поведение решения обратной задачи для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения* // *Карпатские математические публикации*. — 2013. — Т.5, №2. — С. 326–335.

Рассмотрена обратная задача с интегральным условием переопределения для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения с неизвестным множителем правой части уравнения, который зависит от времени. Найдены условия, при которых обобщенное решение задачи стремится к нулю при возрастании временной переменной.

*Ключевые слова и фразы:* обратная задача, ультрапараболическое уравнение, обобщенное решение.