ISSN 2075-9827 `http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp`
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 11–25 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.11–25
doi:10.15330/cmp.6.1.11-25

Гоєнко Н.П.[1], Гладун В.Р.[2], Манзій О.С.[2]

ПРО НЕСКІНЧЕННІ ЗАЛИШКИ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ НЬОРДУНДА ДЛЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ АППЕЛЯ

Досліджено відповідність, збіжність і стійкість до збурень нескінченних залишків гіллястого ланцюгового дробу Ньорлунда в полікруговій області $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \le r, j = 1,2\}$, $0 < r < 1/8$, у випадку довільних параметрів гіпергеометричної функції Аппеля.

Ключові слова і фрази: гіпергеометрична функція Аппеля, гіллястий ланцюговий дріб.

[1] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
[2] Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
E-mail: hoyenko@gmail.com (Гоєнко Н.П.), v_hladun@yahoo.com (Гладун В.Р.), lesly@ukr.net (Манзій О.С.)

Вступ

Ефективним апаратом наближення гіпергеометричних функцій багатьох змінних є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) [1, 12]. Алгоритми розвинення у ГЛД деяких відношень гіпергеометричних функцій будуються послідовними вкладеннями певних рекурентних співвідношень. У даній роботі розглядається ГЛД Ньорлунда, який є розвиненням відношень функцій Аппеля. Питання збіжності ГЛД Ньорлунда вивчалося у випадку, коли параметри функції невід'ємні, а область збіжності — гіпероктант $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_j < 1/2, j = 1,2\}$ [1]. У випадку довільних параметрів функції одержано полікругову область збіжності, радіус якої визначається параметрами функції [9]. Однак гранична поведінка елементів ГЛД дозволяє вказати область $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| < 1/8, j = 1,2\}$, незалежну від параметрів функції, в якій починаючи з деякого n_0, усі елементи ГЛД задовольняють багатовимірний аналог теореми Ворпіцького, тому нескінченні залишки ("хвости") $Q^{\infty}_{i(n)}$ ГЛД є збіжними. Використовуючи принцип відповідності, в роботі доведено, що нескінченні залишки $Q^{\infty}_{i(n)}$ ГЛД Ньорлунда рівномірно збігаються до відношення функцій, одержаних при побудові розвинення на n-му поверсі.

Однією з фундаментальних властивостей неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень є властивість стійкості до збурень. У роботах [3, 4, 13, 14] встановлено оцінки відносних похибок підхідних дробів числових ГЛД у випадку додатних елементів та у випадку комплексних елементів, які задовольняють багатовимірні аналоги теорем Ворпіцького та Слєшинського-Прінгсгейма. Ці результати сформульовані в термінах простих множин стійкості ГЛД, що накладало обмеження на збурення елементів, які належать межі множини стійкості, тобто точні та збурені елементи ГЛД належали одній і тій же множині. Вперше вводиться поняття ГЛД стійкого до збурень, що природньо дозволяє

УДК 517.526
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 11J70, 30B70, 40A15, 33C65, 41A20.

збурені елементи вибирати з ширшої множини в порівнянні з множиною точних елементів. Запропонований підхід дослідження стійкості до збурень розглянуто на прикладі ГЛД, елементи якого задовольняють умови багатовимірного аналогу теореми Ворпіцького. Одержані результати застосовано до дослідження стійкості до збурень функціонального ГЛД Ньорлунда, у який розвивається відношення функцій Аппеля F_1.

1 Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_1 у гіллястий ланцюговий дріб

Гіпергеометрична функція Аппеля від двох змінних F_1 означена у роботах [2, 7] подвійним степеневим рядом вигляду:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;z_1,z_2)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m}{(\gamma)_{n+m}\ m!\ n!}z_1^n z_2^m,$$

де параметри $\alpha,\beta,\beta',\gamma\in\mathbb{C}$, $\gamma\neq 0,-1,-2,...$, $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$ — символ Похгаммера, $k\geq 1$, $(\alpha)_0=1$, z_1,z_2 — комплексні змінні.

У роботі [5] побудовано розвинення у гіллястий ланцюговий дріб Ньорлунда для деякого відношення функцій Лаурічелли $F_D^{(N)}$. Сформулюємо цей результат у випадку $N=2$ для відношення функції Аппеля F_1.

Теорема 1. *Відношення гіпергеометричних функцій Аппеля*

$$\frac{F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+1,\beta+1,\beta';\gamma+1;z_1,z_2)}$$

розвивається у гіллястий ланцюговий дріб Ньорлунда вигляду

$$b_0(z_1,z_2)+\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2)},\tag{1}$$

коефіцієнти якого

$$b_0(z_1,z_2)=1-\frac{\alpha+\beta+1}{\gamma}z_1-\frac{\beta'}{\gamma}z_2,\tag{2}$$

$$a_{i(k)}(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha+k)(\beta+p)}{(\gamma+k-1)(\gamma+k)}z_1(1-z_1), & \text{якщо } i_k=1,\\ \dfrac{(\alpha+k)(\beta'+q-1)}{(\gamma+k-1)(\gamma+k)}z_2(1-z_2), & \text{якщо } i_k=2,\end{cases}\tag{3}$$

$$b_{i(k)}(z_1,z_2)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha+\beta+k+p+1}{\gamma+k}z_1-\dfrac{\beta'+q}{\gamma+k}z_2, & \text{якщо } i_k=1,\\ 1-\dfrac{\beta+p+1}{\gamma+k}z_1-\dfrac{\alpha+\beta'+k+q}{\gamma+k}z_2, & \text{якщо } i_k=2,\end{cases}\tag{4}$$

де $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, *мультиіндекс* $i(k)\in\mathcal{I}=\{i(s)=i_1i_2\ldots i_s:\ i_l=1,2;\ l=\overline{1,s},\ s\in\mathbb{N};i(0)=0\}$, p *та* q *— кількість одиниць та двійок в мультиіндексі* $i(k)$ *відповідно,* $k=p+q$, $k=0,1,2,\ldots$.

2 Відповідність

Важливу роль у теорії неперервних дробів відіграє відповідність послідовностей мероморфних функцій. Деякі методи розвинення функцій у неперервні дроби ґрунтуються на відповідності між формальним степеневим рядом і послідовністю n-тих апроксимант неперервного дробу [6, 8, 11].

Нехай $\{R_n(z_1, z_2)\}$ — послідовність раціональних функцій, голоморфних в початку координат. Розглянемо формальний подвійний степеневий ряд (ФПСР)

$$P = \sum_{k_1,k_2 \geq 0}^{\infty} c_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{5}$$

де c_{k_1,k_2} — комплексні числа, z_1, z_2 — комплексні змінні, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх ФПСР, яка є кільцем з одиницею відносно операцій додавання і множення на скаляр. Визначимо відображення $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ наступним чином: $\forall P \in \mathcal{P}$

$$\lambda(P) = \begin{cases} \infty, \text{ якщо } P \equiv 0, \\ m, \text{ якщо } P \not\equiv 0, \end{cases}$$

де m — найменший степінь однорідного полінома, для якого $c_{k_1,k_2} \neq 0$, тобто $m = k_1 + k_2$.

Нехай $P(R_n) = P(R_n(z_1, z_2))$ — розвинення функції $R_n(z_1, z_2)$ в ФПСР, $n \geq 1$.

Послідовність раціональних функцій $\{R_n(z_1, z_2)\}$, голоморфних в початку координат, назвемо *відповідною* до ФПСР (5) в точці $(z_1, z_2) = (0, 0)$, якщо $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$, де $\nu_n = \lambda(P - P(R_n))$ — порядок відповідності функції $R_n(z_1, z_2)$.

Послідовність раціональних функцій $\{R_n(z_1, z_2)\}$ *рівномірно збігається* на компактах області D, $D \subset \mathbb{C}^2$, якщо для довільного компакта K області D:

1) існує таке число $N(K)$, що функції $R_n(z_1, z_2)$ є голоморфними в деякій області, що містить K для всіх $n > N(K)$;

2) для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $N_\varepsilon > N(K)$, що

$$\sup_{(z_1,z_2)\in K} |R_{n+k}(z_1, z_2) - R_n(z_1, z_2)| < \varepsilon \quad \text{для } n \geq N_\varepsilon, \quad k \geq 0.$$

Послідовність раціональних функцій $\{R_n(z_1, z_2)\}$ *рівномірно обмежена* на компактах області D, якщо для довільного компакта K області D існують такі числа $M(K)$ і $B(K)$, що

$$\sup_{(z_1,z_2)\in K} |R_n(z_1, z_2)| < B(K) \quad \text{для } n \geq M(K).$$

Сформулюємо принцип відповідності для послідовності раціональних функцій двох змінних.

Теорема 2 (принцип відповідності). *Нехай послідовність $\{R_n(z_1, z_2)\}$ раціональних функцій, голоморфних в початку координат, є відповідною до ФПСР* (5). *Припустимо, що існує такий окіл початку координат $D_\delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| < \delta, j = 1, 2\}$, $\delta > 0$, що кожна функція $R_n(z_1, z_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, голоморфна в D_δ і область $D (D \subset \mathbb{C}^2)$ містить D_δ. Тоді:*

(А) послідовність $\{R_n(z_1, z_2)\}$ збігається рівномірно на компактах області D тоді і тільки тоді, коли $\{R_n(z_1, z_2)\}$ рівномірно обмежена на компактах області D;

(Б) якщо послідовність $\{R_n(z_1, z_2)\}$ збігається рівномірно на компактах області D, то $f(z_1, z_2) = \lim_{n\to\infty} R_n(z_1, z_2)$ голоморфна в D_δ і $P = P(f)$ є рядом Тейлора функції $f(z_1, z_2)$ в початку координат.

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно як і в роботі [10], з урахуванням того, що функції $R_n(z_1,z_2)$, $n=1,2,\ldots$, є раціональними і голоморфними в D_δ.

Нехай

$$v_0(z_1,z_2)+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}(z_1,z_2)}{v_{i(k)}(z_1,z_2)} \tag{6}$$

— функціональний гіллястий ланцюговий дріб, коефіцієнти $u_{i(k)}(z_1,z_2)$, $v_{i(k)}(z_1,z_2)$ якого є поліномами. Апроксиманти ГЛД (6) визначають як скінченні ГЛД наступним чином:

$$f_n(z_1,z_2)=v_0(z_1,z_2)+\overset{n}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}(z_1,z_2)}{v_{i(k)}(z_1,z_2)},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Зауважимо, що апроксиманти $f_n(z_1,z_2)$, $n\in\mathbb{N}$, ГЛД (6) є раціональними функціями в $\mathbb{C}^2$.

ГЛД (6) *збігається рівномірно* на компактах області D, $D\subset\mathbb{C}^2$, якщо послідовність його апроксимант $\{f_n(z_1,z_2)\}$ збігається рівномірно на компактах області D. ГЛД (6) називають *відповідним* до подвійного формального степеневого ряду P, якщо послідовність його апроксимант $\{f_n(z_1,z_2)\}$ є відповідною до P.

Наслідок 1. *Нехай ГЛД (6) є відповідним в початку координат до подвійного формального степеневого ряду (5) і область D, $D\subset\mathbb{C}^2$, містить початок координат.*

Тоді:

(А) ГЛД (6) збігається рівномірно на компактах області D тоді і тільки тоді, коли послідовність його апроксимант (7) рівномірно обмежена на компактах області D;

(Б) якщо ГЛД (6) рівномірно збігається на компактах області D до деякої голоморфної функції $f(z_1,z_2)$, то ряд $P=P(f)$ є рядом Тейлора для $f(z_1,z_2)$ в точці $(z_1,z_2)=(0,0)$.

Теорема 3. *Нескінченний залишок гіллястого ланцюгового дробу Ньорлунда для довільного фіксованого мультиіндекса $i(n)\in\mathcal{I}$, $n\in\mathbb{N}_0$,*

$$Q_{i(n)}^{\infty}(z_1,z_2)=b_{i(n)}(z_1,z_2)+\overset{\infty}{\underset{k=n+1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2)}, \tag{8}$$

коефіцієнти якого визначаються формулами (2)–(4), є відповідним до формального подвійного степеневого ряду, в який розвивається відношення гіпергеометричних функцій Аппеля

$$\frac{F_1(\alpha+n,\beta+p,\beta'+q;\gamma+n;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+n+1,\beta+p+\delta_{i_n}^1,\beta'+q+\delta_{i_n}^2;\gamma+n+1;z_1,z_2)}, \tag{9}$$

де p та q — кількість одиниць та двійок в мультиіндексі $i(n)$ відповідно, $n=p+q$, δ_j^i — символ Кронекера, і для кожного його підхідного дробу $f_m(z_1,z_2)$, $m>n$, порядок відповідності $\nu_m=m-n+1$.

Доведення. Для $n=0$ твердження теореми випливає з [5] при $N=2$. Нехай $i(n)$ — деякий фіксований мультиіндекс, $i(n)\in\mathcal{I}$, $n\geq 1$. Припустимо, що $i_n=1$ (у випадку $i_n=2$ доведення аналогічне), причому p і q — кількість одиниць та двійок у мультиіндексі $i(n)$ відповідно, $n=p+q$.

Позначимо

$$Q_{i(m)}^{(m)}(z_1,z_2)=b_{i(m)}(z_1,z_2),\quad Q_{i(k)}^{(m)}(z_1,z_2)=b_{i(k)}(z_1,z_2)+\sum_{i_{k+1}=1}^{2}\frac{a_{i(k+1)}(z_1,z_2)}{Q_{i(k+1)}^{(m)}(z_1,z_2)}, \tag{10}$$

де $k = m-1, m-2, \dots, n$, $m \geq n$, $i(m), i(k) \in \mathcal{I}$. Тоді m-ту апроксиманту ГЛД (8) при $m > n \geq 1$ запишемо у вигляді

$$f_m(z_1,z_2) = Q_{i(n)}^{(m)}(z_1,z_2) = b_{i(n)}(z_1,z_2) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{m} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2)}.$$

Нехай p_k і q_k — кількість одиниць та двійок у мультиіндексі $i(k)$ відповідно, $k = p_k + q_k$, $i(k) \in \mathcal{I}$. Гіпергеометричні функції Аппеля F_1 задовольняють наступні рекурентні співвідношення (див. [5] для $N=2$):

$$\begin{aligned} &F_1(\alpha+k,\beta+p_k,\beta'+q_k;\gamma+k;z_1,z_2) = \left(1 - \frac{\alpha+\beta+k+p_k+1}{\gamma+k}z_1 - \frac{\beta'+q_k}{\gamma+k}z_2\right) \\ &\times F_1(\alpha+k+1,\beta+p_k+1,\beta'+q_k;\gamma+k+1;z_1,z_2) + \frac{(\alpha+k+1)(\beta+p_k+1)}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}z_1(1-z_1) \\ &\times F_1(\alpha+k+2,\beta+p_k+2,\beta'+q_k;\gamma+k+2;z_1,z_2) + \frac{(\alpha+k+1)(\beta'+q_k)}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}z_2(1-z_2) \\ &\times F_1(\alpha+k+2,\beta+p_k+1,\beta'+q_k+1;\gamma+k+2;z_1,z_2), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &F_1(\alpha+k,\beta+p_k,\beta'+q_k;\gamma+k;z_1,z_2) = \left(1 - \frac{\alpha+\beta'+k+q_k+1}{\gamma+k}z_2 - \frac{\beta+p_k}{\gamma+k}z_1\right) \\ &\times F_1(\alpha+k+1,\beta+p_k,\beta'+q_k+1;\gamma+k+1;z_1,z_2) + \frac{(\alpha+k+1)(\beta+p_k)}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)}z_1(1-z_1) \\ &\times F_1(\alpha+k+2,\beta+p_k+1,\beta'+q_k+1;\gamma+k+2;z_1,z_2) + \frac{(\alpha+k+1)(\beta'+q_k+1)}{(\gamma+k)(\gamma+k+1)} \\ &\times z_2(1-z_2)F_1(\alpha+k+2,\beta+p_k,\beta'+q_k+2;\gamma+k+2;z_1,z_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Позначимо

$$X_{p_k,q_k} = \frac{F_1(\alpha+k,\beta+p_k,\beta'+q_k;\gamma+k;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+k+1,\beta+p_k+1,\beta'+q_k;\gamma+k+1;z_1,z_2)},$$

$$X'_{p_k,q_k} = \frac{F_1(\alpha+k,\beta+p_k,\beta'+q_k;\gamma+k;z_1,z_2)}{F_1(\alpha+k+1,\beta+p_k,\beta'+q_k+1;\gamma+k+1;z_1,z_2)}.$$

Тоді, згідно рекурентних формул (11)–(12) для гіпергеометричної функції Аппеля F_1 та формул для елементів гіллястого ланцюгового дробу типу Ньорлунда (2)–(4), маємо

$$X_{p_k,q_k} = b_{i(k)}(z_1,z_2) + \frac{a_{i(k)1}(z_1,z_2)}{X_{p_k+1,q_k}} + \frac{a_{i(k)2}(z_1,z_2)}{X'_{p_k,q_k+1}},$$

$$X'_{p_k,q_k} = b_{i(k)}(z_1,z_2) + \frac{a_{i(k)1}(z_1,z_2)}{X_{p_k+1,q_k}} + \frac{a_{i(k)2}(z_1,z_2)}{X'_{p_k,q_k+1}}.$$

Таким чином, для $i_n = 1$ відношення функцій (9) $X_{p,q}$ розвивається у скінченний гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$X_{p,q} = b_{i(n)}(z_1,z_2) + \sum_{i_{n+1}=1}^{2} \cfrac{a_{i(n+1)}(z_1,z_2)}{b_{i(n+1)}(z_1,z_2) + \ddots + \sum\limits_{i_{m+1}=1}^{2} \cfrac{a_{i(m+1)}(z_1,z_2)}{W_{i(m+1)}(z_1,z_2)}},$$

де

$$W_{i(m+1)}(z_1,z_2) = \begin{cases} X_{p_m+1,q_m}, & \text{якщо } i_{m+1} = 1, \\ X'_{p_m,q_m+1}, & \text{якщо } i_{m+1} = 2. \end{cases}$$

Аналогічно до (10) позначимо:

$$\bar{Q}_{i(m+1)}^{(m+1)}(z_1,z_2)=W_{i(m+1)}(z_1,z_2),\quad \bar{Q}_{i(k)}^{(m+1)}(z_1,z_2)=b_{i(k)}(z_1,z_2)+\sum_{i_{k+1}=1}^{2}\frac{a_{i(k+1)}(z_1,z_2)}{\bar{Q}_{i(k+1)}^{(m+1)}(z_1,z_2)},$$

де $n\le k\le m$. Зауважимо, що відношення (9) дорівнює $X_{p,q}$ і $X_{p,q}=\bar{Q}_{i(n)}^{(m+1)}(z_1,z_2)$.

Використовуючи методику виведення формули різниці між підхідними дробами [3], маємо

$$\begin{aligned} X_{p,q}-f_m(z_1,z_2)&=\bar{Q}_{i(n)}^{(m+1)}(z_1,z_2)-Q_{i(n)}^{(m)}(z_1,z_2)\\ &=(-1)^m\sum_{i_{n+1},\ldots,i_{m+1}=1}^{2}\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{m+1}a_{i(k)}(z_1,z_2)}{W_{i(m+1)}(z_1,z_2)\prod\limits_{k=n+1'}^{m}\left[Q_{i(k)}^{(m)}(z_1,z_2)\bar{Q}_{i(k)}^{(m+1)}(z_1,z_2)\right]}. \end{aligned}\tag{13}$$

Оскільки величини $W_{i(m+1)}(0,0)$, $Q_{i(k)}^{(m)}(0,0)$, $\bar{Q}_{i(k)}^{(m+1)}(0,0)$, $n\le k\le m$, рівні одиниці, то $W_{i(m+1)}(z_1,z_2)$, $Q_{i(k)}^{(m)}(z_1,z_2)$, $\bar{Q}_{i(k)}^{(m+1)}(z_1,z_2)$ відмінні від нуля в деякому околі початку координат. Розкладаючи формально у подвійні степеневі ряди $\Big(W_{i(m+1)}(z_1,z_2)\Big)^{-1}$, $\Big(Q_{i(k)}^{(m)}(z_1,z_2)\Big)^{-1}$, $\Big(\bar{Q}_{i(k)}^{(m+1)}(z_1,z_2)\Big)^{-1}$ і враховуючи степінь чисельника в (13), одержимо:

$$X_{p,q}-f_m(z_1,z_2)=\sum_{j_1,j_2\ge0,\ j_1+j_2\ge\nu_m}c_{j_1j_2}z_1^{j_1}z_2^{j_2},$$

де $c_{j_1j_2}$ — деякі комплексні коефіцієнти, $\nu_m=m-n+1$. Тому нескінченний залишок $Q_{i(n)}^{\infty}(z_1,z_2)$, $i_n=1$, ГЛД (1) є відповідним до ФПСР, у який розвивається відношення $X_{p,q}$ з порядком відповідності ν_m. □

3 Збіжність залишків ГЛД Ньорлунда

Теорема 4. *Нехай $\alpha,\beta,\beta',\gamma$ — довільні комплексні числа ($\gamma\ne0,-1,-2,\ldots$), r — дійсне число, $0<r<1/8$, тоді існує таке натуральне число $n_0=n_0(\alpha,\beta,\beta',\gamma,r)$, що для кожного $n>n_0$ і довільного фіксованого мультиіндекса $i(n)\in\mathcal{I}$ нескінченний залишок $Q_{i(n)}^{\infty}(z_1,z_2)$ (8) ГЛД Ньорлунда (1) рівномірно збігається в полікрузі*

$$G_r:=\Big\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_j|\le r,j=1,2\Big\}\tag{14}$$

до голоморфної функції (9).

Доведення. Нехай $(z_1,z_2)\in G_r$ (14). Розглянемо послідовності $\{\xi_k\}$ та $\{\zeta_k\}$:

$$\xi_k=\frac{|\alpha+k|(\max\{|\beta|,|\beta'|\}+k)}{|(\gamma+k-1)(\gamma+k)|},\quad \zeta_k=\frac{|\alpha|+|\beta|+|\beta'|+2k-1}{|\gamma+k-1|},\quad k=1,2,\ldots\tag{15}$$

Легко бачити, що $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_k=2$. Виберемо ε, $0<\varepsilon\le\varepsilon_r$, де

$$\varepsilon_r=\frac{3-2\sqrt{2(1+r)}}{r},\tag{16}$$

тоді $\exists k_{\xi} = k_{\xi}(r) : \forall k > k_{\xi} \Rightarrow \xi_k < 1+\varepsilon$, $\exists k_{\zeta} = k_{\zeta}(r) : \forall k > k_{\zeta} \Rightarrow \zeta_k < 2+\varepsilon$. Покладемо $n_0 = \max\{k_{\xi}, k_{\zeta}\}$, тоді

$$\forall k > n_0 \Rightarrow (\xi_k < 1+\varepsilon) \wedge (\zeta_k < 2+\varepsilon). \tag{17}$$

Нехай $i(n)$ — довільний фіксований мультиіндекс, $i(n) \in \mathcal{I}$, $n > n_0$. ГЛД (8), який є нескінченним залишком ГЛД Ньорлунда (1), після еквівалентних перетворень запишемо у вигляді

$$Q^{\infty}_{i(n)}(z_1,z_2) = b_{i(n)}(z_1,z_2) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2)} = b_{i(n)}(z_1,z_2)\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{c_{i(k)}(z_1,z_2)}{1}\right),$$

де $c_{i(k)}(z_1,z_2)$ визначаються формулами: $c_{i(k)}(z_1,z_2) = a_{i(k)}(z_1,z_2) b^{-1}_{i(k)}(z_1,z_2) b^{-1}_{i(k-1)}(z_1,z_2)$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $k > n$. Встановимо оцінки виразів $\left|c_{i(k)}(z_1,z_2)\right|$ для довільного мультиіндекса $i(k) \in \mathcal{I}$, $k > n$, в полікрузі (14). Враховуючи формули коефіцієнтів (2)–(4) теореми 1, позначення (15) та нерівності (17), маємо

$$\begin{aligned}\left|c_{i(k)}(z_1,z_2)\right| &= \left|\frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k)}(z_1,z_2) b_{i(k-1)}(z_1,z_2)}\right| \le \frac{|\alpha+k|(\max\{|\beta|,|\beta'|\}+k)}{|(\gamma+k-1)(\gamma+k)|} r(1+r) \\ &\times \left(1 - \frac{|\alpha|+|\beta|+|\beta'|+2k-1}{|\gamma+k-1|} r\right)^{-1} \left(1 - \frac{|\alpha|+|\beta|+|\beta'|+2k+1}{|\gamma+k|} r\right)^{-1} \\ &\le \frac{\xi_k r(1+r)}{2(1-\zeta_{k+1} r)(1-\zeta_k r)} \le \frac{(1+\varepsilon) r(1+r)}{2(1-(2+\varepsilon)r)^2}.\end{aligned}$$

Легко переконатися, що при заданому виборі ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_r$, де ε_r визначається згідно (16), виконується нерівність

$$\frac{(1+\varepsilon) r(1+r)}{(1-(2+\varepsilon)r)^2} \le \frac{1}{4},$$

тобто

$$\left|c_{i(k)}(z_1,z_2)\right| \le \frac{1}{8}, \quad i(k) \in \mathcal{I},\ k > n. \tag{18}$$

Оскільки для елементів ГЛД (8) виконуються нерівності (18), то нескінченний залишок (8) ГЛД Ньорлунда рівномірно збігається до деякої голоморфної функції $f(z_1,z_2)$ за багатовимірним аналогом теореми Ворпіцького [3, теорема 3.14].

З теореми 3 і наслідку 1 випливає збіжність нескінченного залишку $Q^{\infty}_{i(n)}(z_1,z_2)$ до відношення функцій Аппеля (9). □

4 Стійкість до збурень

Розглянемо числовий гіллястий ланцюговий дріб

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{19}$$

Позначимо множини мультиіндексів $\mathcal{I}_0 = \{0\}$, $\mathcal{I}_k = \left\{ i\,(k) = i_1 i_2 \ldots i_k : i_l = 1,2,\ l = \overline{1,k} \right\}$, $k = 1,2,\ldots$ Очевидно, що $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k$.

ГЛД (19) називають *відносно стійким до збурень*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для кожного $\widehat{a}_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, і кожного $\widehat{b}_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, таких, що $\left| \dfrac{\widehat{a}_{i(k)} - a_{i(k)}}{a_{i(k)}} \right| < \delta$, $\left| \dfrac{\widehat{b}_{i(k)} - b_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right| < \delta$, виконуються нерівності

$$\left| \frac{\widehat{f}_s - f_s}{f_s} \right| < \varepsilon, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де $f_s = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{2} \dfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$, $\widehat{f}_s = \widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{2} \dfrac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}}$.

Гіллястий ланцюговий дріб

$$\widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}} \tag{20}$$

називають *збуреним ГЛД* до дробу (19), а його елементи — збуреними до елементів дробу (19).

Припустимо, що

$$a_{i(k)} \neq 0,\ \widehat{a}_{i(k)} \neq 0,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$
$$b_{i(k)} \neq 0,\ \widehat{b}_{i(k)} \neq 0,\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$Q^{(s)}_{i(p)} \neq 0,\ \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} \neq 0,\ i(p) \in \mathcal{I}_p,\ p = \overline{0, s},\ s = 1, 2, \ldots,$$

де $Q^{(s)}_{i(p)} = b_{i(p)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=p+1}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{2} \dfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$, $\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} = \widehat{b}_{i(p)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=p+1}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{2} \dfrac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}}$.

Позначимо через $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$ відносні похибки елементів $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ відповідно, $\varepsilon^{(s)}_{i(p)}$ — відносні похибки залишків $Q^{(s)}_{i(p)}$ підхідного дробу f_s ГЛД (19), тобто

$$\widehat{a}_{i(k)} = a_{i(k)} \left(1 + \alpha_{i(k)}\right), \quad \widehat{b}_{i(k)} = b_{i(k)} \left(1 + \beta_{i(k)}\right), \qquad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$
$$\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} = Q^{(s)}_{i(p)} \left(1 + \varepsilon^{(s)}_{i(p)}\right), \qquad i(p) \in \mathcal{I}_p,\ p = \overline{0, s},\ s = 1, 2, \ldots$$

Розглянемо величини $\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p)}$, що визначаються співвідношеннями

$$Q^{(s)}_{i(p)} = \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} \left(1 + \widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p)}\right), \qquad i(p) \in \mathcal{I}_p,\ p = \overline{0, s},\ s = 1, 2, \ldots$$

Доведемо, що для похибок $\varepsilon^{(s)}_{i(p)}$, $\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p)}$ справджуються рекурентні формули

$$\varepsilon^{(s)}_{i(p)} = \left(1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{2} q^{(s)}_{i(p+1)}\right) \beta_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{2} q^{(s)}_{i(p+1)} \left(\alpha_{i(p+1)} \left(1 + \widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p+1)}\right) + \widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p+1)}\right), \tag{21}$$

$$\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p)} = -\left(1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{2} \widehat{q}^{(s)}_{i(p+1)}\right) \frac{\beta_{i(p)}}{1 + \beta_{i(p)}} + \sum_{i_{p+1}=1}^{2} \widehat{q}^{(s)}_{i(p+1)} \left(-\frac{\alpha_{i(p+1)}}{1 + \alpha_{i(p+1)}} \left(1 + \varepsilon^{(s)}_{i(p+1)}\right) + \varepsilon^{(s)}_{i(p+1)}\right), \tag{22}$$

при $i(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{0, s-1}$, $s = 1, 2, \ldots$, де

$$q^{(s)}_{i(p)} = \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p-1)} Q^{(s)}_{i(p)}}, \tag{23}$$

$$\widehat{q}^{(s)}_{i(p)} = \frac{\widehat{a}_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p-1)}\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}},$$

$i\,(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{1,s}$, і при $p = s$

$$\varepsilon^{(s)}_{i(s)} = \beta_{i(s)},\ \widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(s)} = -\frac{\beta_{i(p+1)}}{1+\beta_{i(p+1)}}, \qquad i\,(s) \in \mathcal{I}_s. \tag{24}$$

Формули (24) для довільного мультиіндекса $i(s)$, $s \in \mathbb{N}$, очевидні.

Для фіксованого мультиіндекса $i(p)$, $i(p) \in \mathcal{I}_p$, $0 \le p \le s-1$, маємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(s)}_{i(p)} &= \frac{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} - Q^{(s)}_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{1}{Q^{(s)}_{i(p)}}\left(b_{i(p)}\left(1+\beta_{i(p)}\right) + \sum_{i_{p+1}=1}^{2} \frac{a_{i(p+1)}\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)}{Q^{(s)}_{i(p+1)}\left(1+\varepsilon^{(s)}_{i(p+1)}\right)}\right) - 1 \\
&= \frac{b_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}}\left(1+\beta_{i(p)}\right) + \sum_{i_{p+1}=1}^{2} \frac{a_{i(p+1)}\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)\left(1+\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p+1)}\right)}{Q^{(s)}_{i(p)}Q^{(s)}_{i(p+1)}} - 1 \\
&= \left(1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{s} q^{(s)}_{i(p+1)}\right)\beta_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{2} q^{(s)}_{i(p+1)}\left(\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)\left(1+\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p+1)}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо рекурентні формули (22) для відносних похибок $\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p)}$, $i\,(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{0, s-1}$, $s = 1, 2, \ldots$

Почергово використовуючи співвідношення (21), (22) та співвідношення (24), отримуємо формули відносних похибок $\varepsilon^{(s)}_{i(p)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(s)}_{i(p)} &= \left(1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{2} \widetilde{q}^{(s)}_{i(p+1)}\right)\widetilde{\beta}_{i(p)} \\
&\quad + \sum_{k=p+1}^{s} \sum_{i_{p+1},\ldots,i_k=1}^{2} \left(\gamma^{(s)}_{i(k)} + \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \widetilde{q}^{(s)}_{i(k+1)}\right)\widetilde{\beta}_{i(k)}\right) \prod_{m=p+1}^{k} \widetilde{q}^{(s)}_{i(m)},
\end{aligned} \tag{25}$$

$i\,(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{0,s}$, $s = 1, 2, \ldots$, де $\widetilde{q}^{(s)}_{i(s+1)} = 0$, $\widetilde{q}^{(s)}_{i(p+k)} = \begin{cases} q^{(s)}_{i(p+k)}, & \text{якщо } k \text{ непарне}, \\ \widehat{q}^{(s)}_{i(p+k)}, & \text{якщо } k \text{ парне}, \end{cases}$

$$\gamma^{(s)}_{i(p+k)} = \begin{cases} \alpha_{i(p+k)}\left(1+\widehat{\varepsilon}^{(s)}_{i(p+k)}\right), & \text{якщо } k \text{ непарне}, \\ -\dfrac{\alpha_{i(p+k)}}{1+\alpha_{i(p+k)}}\left(1+\varepsilon^{(s)}_{i(p+k)}\right), & \text{якщо } k \text{ парне}, \end{cases}$$

$$\widetilde{\beta}_{i(p+k)} = \begin{cases} -\dfrac{\beta_{i(p+k)}}{1+\beta_{i(p+k)}}, & \text{якщо } k \text{ непарне}, \\ \beta_{i(p+k)}, & \text{якщо } k \text{ парне}, \end{cases}$$

$i\,(p+k) \in \mathcal{I}_{p+k}$, $k = \overline{1, s-p}$.

Поклавши в (25) $p = 0$, отримуємо формулу відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (19)

$$\varepsilon^{(s)}_0 = \left(1 - \sum_{i_1=1}^{2} \widetilde{q}^{(s)}_{i(1)}\right)\widetilde{\beta}_0 + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{2} \left(\gamma^{(s)}_{i(k)} + \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \widetilde{q}^{(s)}_{i(k+1)}\right)\widetilde{\beta}_{i(k)}\right) \prod_{m=1}^{k} \widetilde{q}^{(s)}_{i(m)}. \tag{26}$$

Лема. *Величини* $q_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{1,s}$, $s = 1,2,\ldots$, *що визначаються згідно з* (23), *інваріантні відносно перетворень еквівалентності*

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{r_{i(k-1)} r_{i(k)} a_{i(k)}}{r_{i(k)} b_{i(k)}}, \tag{27}$$

де $r_{i(k)}$ *— довільні комплексні числа,* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1,2,\ldots$, $r_{i(k)} \neq 0$, $r_0 = 1$.

Доведення. Нехай s — довільне натуральне число і $G_{i(p)}^{(s)}$ — залишки s-го підхідного дробу гіллястого ланцюгового дробу (27). Покажемо, що $G_{i(p)}^{(s)} = r_{i(p)} Q_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{0,s}$, де $Q_{i(p)}^{(s)}$ — залишки s-го підхідного дробу ГЛД (19). Застосуємо метод математичної індукції відносно p, $p = s, s-1, \ldots, 0$. При $p = s$ рівність очевидна. Припустивши, що рівність справджується для деякого $p = k+1$, $0 \leq k \leq s-1$, при $p = k$ маємо:

$$G_{i(k)}^{(s)} = r_{i(k)} b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \frac{r_{i(k)} r_{i(k+1)} a_{i(k+1)}}{G_{i(k+1)}^{(s)}} = r_{i(k)} \left(b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right) = r_{i(k)} Q_{i(k)}^{(s)}.$$

Тоді

$$g_{i(p)}^{(s)} = \frac{r_{i(p-1)} r_{i(p)} a_{i(p)}}{G_{i(p-1)}^{(s)} G_{i(p)}^{(s)}} = \frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(s)} Q_{i(p)}^{(s)}} = q_{i(p)}^{(s)},\ i(p) \in \mathcal{I}_p,\ p = \overline{0,s}.$$

□

Теорема 5. *Нехай елементи ГЛД* (19) *задовольняють умови*

$$\left| \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)} b_{i(k)}} \right| \leq \rho_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)} \right),\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 1,2,\ldots, \tag{28}$$

де $\rho_{i(k)}$ *— такі додатні сталі, що*

$$\sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} < 1,\ i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1},\ k = 1,2,\ldots,$$

$$\sup_{\substack{i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}, \\ k=1,2,\ldots}} \sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)} \right) < \frac{1}{4}.$$

Тоді ГЛД (19) *відносно стійкий до збурень, якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{m=0}^{k} \frac{\eta_{2m+1}}{1 - \eta_{2m+1}}, \tag{29}$$

де $\eta_k = \max_{i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}} \left\{ \sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} \right\}$, $k = 1,2,\ldots$ *Крім того, якщо відносні похибки елементів ГЛД* (19) *задовольняють умови*

$$|\alpha_{i(k)}| \leq \widetilde{\alpha}, \quad 0 < \widetilde{\alpha} < 1, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 1,2,\ldots, \tag{30}$$

$$|\beta_{i(k)}| \leq \widetilde{\beta}, \quad 0 < \widetilde{\beta} < 1, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

$$\frac{1 + \widetilde{\alpha}}{\left(1 - \widetilde{\beta}\right)^2} \leq \left(4 \sup_{\substack{i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}, \\ k=1,2,\ldots}} \sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)} \right) \right)^{-1}, \tag{32}$$

то для відносних похибок s-тих підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon_0^{(s)}\right| = \left|\frac{\widehat{f}_s - f_s}{f_s}\right| \le \widetilde{\beta} + \frac{\widetilde{\beta}\left(2-\widetilde{\beta}\right) + 2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}} \sum_{k=0}^{s-1} \prod_{m=0}^{[k/2]} \frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}}, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Доведення. Збуримо елементи ГЛД (19) таким чином, щоб виконувались умови (30)–(32). Перетворимо ГЛД (19) і збурений до нього дріб (20) до ГЛД з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці:

$$b_0\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{c_{i(k)}}{1}\right), \qquad \widehat{b}_0\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{\widehat{c}_{i(k)}}{1}\right), \tag{34}$$

де $c_{i(k)} = \dfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)} b_{i(k)}}$, $\widehat{c}_{i(k)} = \dfrac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k-1)} \widehat{b}_{i(k)}}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Позначимо $G_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{G}_{i(p)}^{(s)}$ — залишки s-их підхідних дробів ГЛД (34) відповідно,

$$g_{i(p)}^{(s)} = \frac{c_{i(p)}}{G_{i(p-1)}^{(s)} G_{i(p)}^{(s)}}, \quad \widehat{g}_{i(p)}^{(s)} = \frac{\widehat{c}_{i(p)}}{\widehat{G}_{i(p-1)}^{(s)} \widehat{G}_{i(p)}^{(s)}}, \quad i(p) \in \mathcal{I}_p,\ p = \overline{1, s},\ s = 1, 2, \ldots$$

Величини $\sum_{i_k=1}^{2} \gamma_{i(k)}^{(s)} \widetilde{q}_{i(k)}^{(s)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = \overline{1, s}$, $s = 1, 2, \ldots$, перетворимо з врахуванням парності числа k. При $k = 2m$ маємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i_{2m}=1}^{2} \gamma_{i(2m)}^{(s)} \widetilde{q}_{i(2m)}^{(s)} &= -\sum_{i_{2m}=1}^{2} \frac{\widehat{a}_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2m)}^{(s)}} \frac{\alpha_{i(2m)}}{1+\alpha_{i(2m)}} \left(1 + \varepsilon_{i(2m)}^{(s)}\right) \\
&= -\sum_{i_{2m}=1}^{2} \frac{a_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)} Q_{i(2m)}^{(s)}} \alpha_{i(2m)} = -\sum_{i_{2m}=1}^{2} \frac{c_{i(2m)}}{\widehat{G}_{i(2m-1)}^{(s)} G_{i(2m)}^{(s)}} \frac{\alpha_{i(2m)}}{1+\beta_{i(2m-1)}},
\end{aligned}$$

при $k = 2m+1$ маємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \gamma_{i(2m+1)}^{(s)} \widetilde{q}_{i(2m+1)}^{(s)} &= \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \frac{a_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)} Q_{i(2m+1)}^{(s)}} \alpha_{i(2m+1)} \left(1 + \widehat{\varepsilon}_{i(2m+1)}^{(s)}\right) \\
&= \sum_{i_{2m}=1}^{2} \frac{a_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2m+1)}^{(s)}} \alpha_{i(2m+1)} = \sum_{i_{2m}=1}^{2} \frac{c_{i(2m+1)}}{G_{i(2m)}^{(s)} \widehat{G}_{i(2m+1)}^{(s)}} \frac{\alpha_{i(2m+1)}}{1+\beta_{i(2m+1)}}.
\end{aligned}$$

В силу того, що величини $q_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in \mathcal{I}_p$, $p = \overline{1, s}$, $s = 1, 2, \ldots$, інваріантні відносно перетворень еквівалентності, формула (26) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^{(s)} &= \left(1 - \sum_{i_1=1}^{2} \widetilde{g}_{i(1)}^{(s)}\right) \widetilde{\beta}_0 \\
&+ \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \widetilde{g}_{i(k+1)}^{(s)}\right) \widetilde{\beta}_{i(k)} \prod_{m=1}^{k} \widetilde{g}_{i(m)}^{(s)} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2} \widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)} g_{i(k)}^{(s)} \prod_{m=1}^{k-1} \widetilde{g}_{i(m)}^{(s)},
\end{aligned} \tag{35}$$

де

$$\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)} = \begin{cases} g_{i(k)}^{(s)}, & \text{якщо } k \text{ непарне}, \\ \widehat{g}_{i(k)}^{(s)}, & \text{якщо } k \text{ парне}, \end{cases} \quad \widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{i(k)}}{\left(1+\beta_{i(k)}\right)(1 + \widetilde{\varepsilon}_{i(k)}^{(s)})}, & \text{якщо } k \text{ непарне}, \\[2ex] \dfrac{\alpha_{i(k)}}{\left(1+\beta_{i(k-1)}\right)(1 + \widetilde{\varepsilon}_{i(k-1)}^{(s)})}, & \text{якщо } k \text{ парне}, \end{cases}$$

$i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = \overline{1, s}$, $\widetilde{\varepsilon}_{i(k)}^{(s)}$ — відносні похибки залишків $G_{i(k)}^{(s)}$.

Використовуючи методику множин елементів та відповідних їм множин значень [3, 8], оцінимо величини $\sum_{i_k=1}^{2} |\widetilde{g}^{(s)}_{i(k)}|$, $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$ Для цього розглянемо послідовність множин

$$V_{i(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho_{i(k)} \right\}, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k=1,2,\ldots \tag{36}$$

Множина $\widetilde{V}_{i(k)} = 1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{2} V_{i(k+1)}$ є кругом з центром в точці 1 радіуса $\widetilde{\rho}_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)}$. Оскільки $\widetilde{\rho}_{i(k)} < 1$, то $0 \notin \widetilde{V}_{i(k)}$ і функція $w = c_{i(k)}/z$ відображає множину $\widetilde{V}_{i(k)}$ в круг

$$\frac{c_{i(k)}}{\widetilde{V}_{i(k)}} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - p_{i(k)} \right| \leq r_{i(k)} \right\},$$

де $p_{i(k)} = c_{i(k)} \left(1 - \left(\widetilde{\rho}_{i(k)} \right)^2 \right)^{-1}$, $r_{i(k)} = \left| c_{i(k)} \right| \widetilde{\rho}_{i(k)} \left(1 - \left(\widetilde{\rho}_{i(k)} \right)^2 \right)^{-1}$. Множини (36) є множинами значень величин $\dfrac{c_{i(k)}}{\widetilde{G}^{(s)}_{i(k)}}$, якщо $\left| p_{i(k)} \right| + r_{i(k)} \leq \rho_{i(k)}$. Остання нерівність еквівалентна нерівності (28).

Із умов (28), (30)–(32) для довільного фіксованого мультиіндекса $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots$, маємо

$$\begin{aligned}
\sum_{i_k=1}^{2} \left| \widehat{c}_{i(k)} \right| &= \sum_{i_k=1}^{2} \left| \frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k-1)} \widehat{b}_{i(k)}} \right| = \sum_{i_k=1}^{2} \left| \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)} b_{i(k)}} \right| \left| \frac{1+\alpha_{i(k)}}{\left(1+\beta_{i(k-1)}\right)\left(1+\beta_{i(k)}\right)} \right| \\
&\leq \frac{1+\widetilde{\alpha}}{\left(1-\widetilde{\beta}\right)^2} \sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)} \right) \\
&\leq \frac{1+\widetilde{\alpha}}{\left(1-\widetilde{\beta}\right)^2} \sup_{\substack{i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\\ k=1,2,\ldots}} \sum_{i_k=1}^{2} \rho_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{2} \rho_{i(k+1)} \right) \leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Тоді для залишків $\widehat{G}^{(s)}_{i(k)}$ справджуються оцінки $\left| \widehat{G}^{(s)}_{i(k)} \right| \geq 1/2$.

Величини $\sum_{i_k=1}^{2} \left| \widetilde{g}^{(s)}_{i(k)} \right|$, $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$, оцінимо з врахуванням парності числа k. При $k=2m+1$ маємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \left| g^{(s)}_{i(2m+1)} \right| &= \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \left| \frac{c_{i(2m+1)}}{G^{(s)}_{i(2m)} G^{(s)}_{i(2m+1)}} \right| \leq \left(1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \rho_{i(2m+1)} \right)^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \frac{c_{i(2m+1)}}{G^{(s)}_{i(2m+1)}} \\
&\leq \left(1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \rho_{i(2m+1)} \right)^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{2} \rho_{i(2m+1)} \leq \frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}},
\end{aligned}$$

при $k=2m$ маємо:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{2} \left| \widehat{g}^{(s)}_{i(2m)} \right| = \sum_{i_{2m}=1}^{2} \left| \frac{\widehat{c}_{i(2m)}}{\widehat{G}^{(s)}_{i(2m-1)} \widehat{G}^{(s)}_{i(2m)}} \right| \leq 4 \sum_{i_{2m}=1}^{2} \left| \widehat{c}_{i(2m)} \right| \leq 1.$$

Знайдемо оцінки величин $\sum_{i_k=1}^{2} \left| \widetilde{\gamma}^{(s)}_{i(k)} g^{(s)}_{i(k)} \right|$, $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$, із врахування ванням парності числа k. При $k=2m$ маємо:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{2}\left|\widetilde{\gamma}_{i(2m)}^{(s)}g_{i(2m)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2m}=1}^{2}\left|\frac{c_{i(2m)}}{\widehat{G}_{i(2m-1)}^{(s)}G_{i(2m)}^{(s)}}\right|\left|\frac{\alpha_{i(2m)}}{1+\beta_{i(2m-1)}}\right|$$
$$\le \frac{\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\sum_{i_{2m}=1}^{2}\left|\frac{c_{i(2m)}}{\widehat{G}_{i(2m-1)}^{(s)}G_{i(2m)}^{(s)}}\right| \le \frac{2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\sum_{i_{2m}=1}^{2}\rho_{i(2m)} < \frac{2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}},$$

при $k=2m+1$ маємо:

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{2}\left|\widetilde{\gamma}_{i(2m+1)}^{(s)}g_{i(2m+1)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2m+1}=1}^{2}\left|\frac{c_{i(2m+1)}}{G_{i(2m)}^{(s)}\widehat{G}_{i(2m+1)}^{(s)}}\right|\left|\frac{\alpha_{i(2m+1)}}{1+\beta_{i(2m+1)}}\right|$$
$$\le \frac{\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\sum_{i_{2m+1}=1}^{2}\left|\frac{c_{i(2m+1)}}{G_{i(2m)}^{(s)}\widehat{G}_{i(2m+1)}^{(s)}}\right| \le \frac{2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\left(1-\sum_{i_{2m+1}=1}^{2}\rho_{i(2m+1)}\right)^{-1}$$
$$\times\sum_{i_{2m+1}=1}^{2}\rho_{i(2m+1)}\left(1-\sum_{i_{2m+2}=1}^{2}\rho_{i(2m+2)}\right) \le \frac{2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}}.$$

Із формули (35), враховуючи оцінки величин

$$\sum_{i_k=1}^{2}\left|\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)}\right|,\quad \sum_{i_k=1}^{2}\left|\widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)}g_{i(k)}^{(s)}\right|,\quad i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\quad k=\overline{1,s},\quad s=1,2,\ldots,$$

отримуємо оцінку (33), з якої випливає, що збіжність ряду (29) забезпечує виконання умов означення відносної стійкості до збурень ГЛД (19). □

Нехай в теоремі 5 $\rho_{i(k)}=\rho/2$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots$, $0<\rho<1/2$. Тоді правильним є

Наслідок 2. *Нехай елементи ГЛД* (19) *задовольняють умови*

$$\left|\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}\right| \le \frac{\rho(1-\rho)}{2},\quad 0<\rho<\frac{1}{2},\quad i(k)\in\mathcal{I}_k,\quad k=1,2,\ldots$$

Тоді ГЛД (19) *є відносно стійким до збурень. Крім того, якщо відносні похибки елементів задовольняють умови* (30), (31) *і*

$$\frac{1+\widetilde{\alpha}}{\left(1-\widetilde{\beta}\right)^2} \le \frac{1}{4\rho(1-\rho)}, \tag{37}$$

то для відносних похибок s-тих підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon_0^{(s)}\right| \le \widetilde{\beta}+\frac{\widetilde{\beta}\left(2-\widetilde{\beta}\right)+2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\left(\frac{2\rho}{1-2\rho}-\left(\frac{2\rho}{1-2\rho}+\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s+1}{2}\right]}\right),\ s=1,2,\ldots$$

Нехай $u_{i(k)}(z_1,z_2)$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots$, $v_{i(k)}(z_1,z_2)$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=0,1,2,\ldots$, — функції, визначені в області $D\subset\mathbb{C}^2$.

Функціональний ГЛД (6) назвемо *відносно стійким до збурень* в точці $\left(z_1^0,z_2^0\right)\in D$, якщо числовий дріб $v_0\left(z_1^0,z_2^0\right)+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{u_{i(k)}\left(z_1^0,z_2^0\right)}{v_{i(k)}\left(z_1^0,z_2^0\right)}$ відносно стійкий до збурень. Якщо ГЛД (6) є відносно стійким до збурень в кожній точці $\left(z_1^0,z_2^0\right)\in D$, то область D назвемо *областю відносної стійкості до збурень* ГЛД (6).

Наслідок 3. *Нехай* $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ *— довільні комплексні числа* ($\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$)*,* r *— дійсне число,* $0 < r < 1/8$*, тоді існує таке натуральне число* $n_1 = n_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, r)$*, що для кожного* $n > n_1$ *і довільного фіксованого мультиіндекса* $i(n) \in \mathcal{I}$ *нескінченний залишок ГЛД Ньорлунда* $Q^{\infty}_{i(n)}(z_1, z_2)$ (8) *є відносно стійким до збурень в полікрузі* (14)*. Причому, якщо відносні похибки елементів ГЛД* (8) *задовольняють умови* (30)*,* (31)*,* (37)*, то для відносних похибок* s*-тих підхідних дробів ГЛД* (8) *справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{(s)}_{i(n)}\right| \leq \widetilde{\beta} + \frac{\widetilde{\beta}\left(2-\widetilde{\beta}\right)+2\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}\left(\frac{2\rho}{1-2\rho} - \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} + \frac{1+(-1)^{s-n+1}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s-n+1}{2}\right]}\right),$$

де $s = n, n+1, n+2, \ldots$*,*

$$\rho = \frac{1-\sqrt{1-8r}}{2}. \tag{38}$$

Доведення. Якщо в доведенні теореми 4 вибрати ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'_r$, де

$$\varepsilon'_r = \frac{1+5r-8r^2-\sqrt{1+10r+r^2-8r^3}}{4r^2}, \tag{39}$$

то існує таке натуральне число $n_1 = n_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, r)$, що виконується співвідношення (17). Нехай $i(n)$ — довільний фіксований мультиіндекс, $i(n) \in \mathcal{I}$, $n > n_1$. Тоді, після еквівалентних перетворень, для елементів нескінченного залишку $Q^{\infty}_{i(n)}(z_1, z_2)$ (8) одержимо оцінку

$$\left|\frac{a_{i(k)}(z_1,z_2)}{b_{i(k-1)}(z_1,z_2)b_{i(k)}(z_1,z_2)}\right| \leq \frac{(1+\varepsilon)r(1+r)}{2(1-(2+\varepsilon)r)^2} \leq r = \frac{\rho\,(1-\rho)}{2} < \frac{1}{8},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k, k = n+1, n+2, \ldots$, величина ρ визначається згідно з (38). Отже, за наслідком 2, нескінченний залишок $Q^{\infty}_{i(n)}(z_1, z_2)$ є відносно стійким до збурень в полікрузі (14). □

Зауваження. *Оскільки для величин* ε_r*,* ε'_r*, що визначаються формулами* (16)*,* (39) *відповідно, виконується нерівність* $\varepsilon'_r < \varepsilon_r$*,* $0 < r < 1/8$*, то числа* n_0*,* n_1 *задовольняють співвідношення* $n_1 > n_0$*. Отже, для кожного* $n > n_1$ *і довільного фіксованого мультиіндекса* $i(n) \in \mathcal{I}$ *нескінченний залишок ГЛД Ньорлунда* $Q^{\infty}_{i(n)}(z_1, z_2)$ (8) *є рівномірно збіжним до голоморфної функції* (9) *і відносно стійким до збурень в полікрузі* (14).

References

[1] Antonova T.M., Hoyenko N.P. *Approximation of the ratio of Lauricella functions by a branched continued fraction*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 2004, **47** (2), 7–15. (in Ukrainian)

[2] Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polinomes d'Hermite, Paris: Couthier-Villars, 1926.

[3] Bodnar D.I. Branched Continued Fractions. Naukova Dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)

[4] Bodnar D.I. *Error estimate calculations of branched continued fractions*. Reports NAS of Ukraine 1975, Ser.A 12, 1059–1062. (in Russian)

[5] Bodnar D.I., Hoyenko N.P. *Approximation of the Lauricella hypergeometric functions by a multi-dimensional generalization of Nörlund continued fraction*. In: Proc. of the Ukrainian Math. Congress "Approx. Theory and Harmonic Analysis", Kyiv, 2001, Inst. Math. of NAS of Ukraine, Kyiv, 2002, 34–44.

[6] Dmytryshyn R. *The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series*. J. Approx. Theory 2012, **64** (12), 1520–1539. doi: 10.1016/j.jat.2012.09.002

[7] Exton H. Multiple hypergeometrics functions and applications, New York, Sydnej, Toronto, Chichester: Ellis Horwood, 1976.

[8] Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. Addison-Wesley, London,1980.

[9] Hoyenko N.P. *Application of multidimensional analogue of Worpitzky theorem to investigation of convergence of hypergeometric Lauricella functions expansions in branched continued fractions*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 2003, **46** (4), 44–49. (in Ukrainian)

[10] Hoyenko N.P. *Correspondence principle and convergence of sequences of analytic functions of several variables*. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2007, **4**, 42–49. (in Ukrainian)

[11] Kuchminska Kh.J. Two-dimensional continued fractions. Pidstryhach Institute Appl. Probl. Mech. Math., Lviv, 2010. (in Ukrainian)

[12] Manzij O.S. *On convergence of decomposition of ratio of hypergeometric Appell F3 functions into a branching continued fraction in some unbounded domain*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (2), 7–11. (in Ukrainian)

[13] Nedashkovskiy M.O.*On convergence and computational stability of branched continued fractions of some types*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 1984, **20**, 27–31. (in Russian)

[14] Skorobogatko V.Y. Theory of branched continued fractions and its applications in computational mathematics. Nauka, Moscow, 1983. (in Russian)

Надійшло 06.11.2013

Hoyenko N.P., Hladun V.R., Manzij O.S. *On the infinite remains of the Nörlund branched continued fraction for Appell hypergeometric functions*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 11–25.

The correspondence, convergence and stability to perturbations of the infinite remains of the Nörlund branched continued fraction are investigated in a poly-disc $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \le r, j = 1, 2\}$, $0 < r < 1/8$, in case of arbitrary parameters of Appell hypergeometric function.

Key words and phrases: Appell hypergeometric function, branched continued fraction.

Гоенко Н.П., Гладун В.Р., Манзий А.С. *О бесконечных остатках ветвящейся цепной дроби Нёрлунда для гипергеометрических функций Аппеля* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 11–25.

Исследованы соответствие, сходимость и устойчивость к возмущениям бесконечных остатков ветвящейся цепной дроби Нёрлунда в некоторой поликруговой области $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \le r, j = 1, 2\}$, $0 < r < 1/8$, в случае произвольных параметров гипергеометрической функции Аппеля.

Ключевые слова и фразы: гипергеометрическая функция Аппеля, ветвящеяся цепная дробь.