ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 166–176 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.166–176
doi:10.15330/cmp.6.1.166-176

Черковський Т.М.

Регулярні ємності на метризовних просторах

Доведено, що для (не обов'язково компактного) метричного простору: метрики на просторі ємностей у стилі Прохорова та Зарічного є рівними; повнота простору ємностей рівносильна до повноти вихідного простору. Показано, що для ємностей на метризовних просторах властивості ω-гладкості і τ-гладкості є рівносильними саме на сепарабельних просторах, а властивості ω-гладкості та регулярності щодо деякої (а тоді й кожної) сумісної метрики — саме на компактних просторах.

Ключові слова і фрази: регулярна ємність, ω-гладкість, τ-гладкість, метрика Гаусдорфа, повний метричний простір, сепарабельний простір.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: tymofiy.cher@gmail.com

Вступ

Неадитивні міри (ємності) є природним узагальненням адитивних та зліченно-адитивних мір. Вперше запроваджені Шоке [2], вони знайшли численні застосування у математичній фізиці, теорії оптимізації і особливо у математичній економіці і теорії прийняття рішень. Подібно до неоднозначності перенесення поняття компактності на неметризовні простори, маємо широку гаму означень неадитивної (тобто не обов'язково адитивної) міри [5]. Основні властивості, що утворюють означення "гарної" адитивної міри, зокрема, зовнішня та внутрішня регулярність, можна сформулювати різними способами, які у припущенні (зліченної) адитивності є рівносильними, однак без цього припущення рівносильність втрачається.

Ця стаття присвячена різним варіантам властивості зовнішньої регулярності. Зарічним та Никифорчином [6] було досліджено ємності на компактних гаусдорфових просторах і показано, що зовнішня регулярність рівносильна до відомої для зліченно-адитивних мір властивості τ-гладкості [1]. Никифорчином і Реповшем [4] було встановлено, що саме означення ємності з використанням τ-гладкості дозволяє максимально поширити отримані для компактів результати на тихоновські простори. Водночас природні неадитивні міри на метричних просторах не завжди мають властивість τ-гладкості і навіть слабшу властивість ω-гладкості.

Метою цієї праці є порівняння різних властивостей типу зовнішньої регулярності на метричних та метризовних просторах та з'ясування їх (не-)рівносильності залежно від властивостей цих просторів.

УДК 515.12, 517.518.11
2010 *Mathematics Subject Classification:* 25C15, 28E10.

1 Основні поняття і позначення

Пишемо $A \underset{cl}{\subset} X$ (відповідно $A \underset{op}{\subset} X$), якщо A є замкненою (відповідно відкритою) підмножиною у просторі X. Позначаємо $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $I = [0, 1]$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Компактом називаємо компактний гаусдорфовий простір. На дійсній прямій та її підмножинах розглядаємо стандартну топологію.

Для підмножини F і точки x метричного простору (X, d) позначаємо

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}.$$

Якщо F замкнена у (X, d) та $\varepsilon > 0$, то множини

$$O_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, F) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \text{ для деякого } y \in F\}$$

та

$$\overline{O}_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, F) \leqslant \varepsilon\}$$

є відповідно відкритою і замкненою, і називаються відповідно відкритим та замкненим ε-околами F. Зауважимо, що остання множина для некомпактного (X, d) необов'язково збігається з множиною

$$\{x \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon \text{ для деякого } y \in F\},$$

хоча містить її, але збігається з перетином $\bigcap\limits_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(F)$. Зокрема, $B_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(\{x_0\})$ і $\bar{B}_\varepsilon(x_0) = \bar{O}_\varepsilon(\{x_0\})$ — відповідно відкрита та замкнена кулі з центром в точці $x_0 \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$.

Через $\operatorname{Exp} X$ позначаємо множину всіх замкнених підмножин топологічного простору X, $\exp X = \operatorname{Exp} X \setminus \{\varnothing\}$. Топологія Вієторіса [3] на $\exp X$ — це найслабша з топологій, щодо яких всі множини

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{F \in \exp X \mid F \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n, F \cap U_i \neq \varnothing \text{ для всіх } i = 1, 2, \dots, n\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ і відкритих $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$ є відкритими.

Якщо X — простір з обмеженою метрикою d, то на $\exp X$ розглядаємо *метрику Гаусдорфа* d_H :

$$d_H(F, G) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid F \subset \overline{O}_\varepsilon(G), G \subset \overline{O}\varepsilon(F)\}, \quad F, G \in \exp X.$$

Відомо, що для метричного компакта метрика Гаусдорфа породжує топологію Вієторіса, але у некомпактному випадку це не завжди так.

2 Класи неадитивних мір на тихоновських і метричних просторах

Регулярною неадитивною мірою [6] (регулярною ємністю) на тихоновському просторі X називаємо функцію $c : \operatorname{Exp} X \to \mathbb{R}_+$ з такими трьома властивостями (нижче F, G – замкнені підмножини в X):

(1) $c(\varnothing) = 0$;

(2) якщо $F \subset G$, то $c(F) \leqslant c(G)$ *(монотонність)*;

(3) якщо $c(F) \leqslant a$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожної множини $G \subset U$ виконується $c(G) < a$ (*напівнеперервність згори* чи *зовнішня регулярність*).

Якщо, крім того, виконано $c(X) = 1$ ($c(X) \leqslant 1$), то ємність називається *нормованою* (відповідно *субнормованою*).

Якщо топологія на просторі X визначена метрикою d, то розглядаємо сильнішу версію властивості (3), яку називаємо *регулярністю щодо метрики* d:

(3′) якщо $c(F) \leqslant a$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $c(\overline{O}_\varepsilon(F)) < a$.

Сім'ю множин (F_α), індексовану елементами α частково впорядкованої множини $(\mathcal{A}, \leqslant)$, називаємо монотонно спадною, якщо з $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\alpha \leqslant \beta$ випливає $F_\alpha \supset F_\beta$.

Ємність $c(F)$ називається *ω-гладкою,* якщо для кожної монотонно спадної послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, замкнених множин в X виконується рівність $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} c(F_n) = c(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n)$.

Ємність $c(F)$ називається *τ-гладкою* [4], якщо для кожної монотонно спадної спрямованості (F_α) замкнених множин в X істинна рівність $\inf\limits_\alpha c(F_\alpha) = c(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)$.

Множину всіх ємностей на X позначаємо $\overline{M}X$. Множину всіх регулярних щодо метрики d (відповідно ω-гладких, τ-гладких) ємностей на X позначаємо $\overline{M}_d X$(відповідно $\overline{M}_\omega X$, $\overline{M}_\tau X$). Очевидно, що для метричного простору X виконано $\overline{M}X \supset \overline{M}_d X \supset \overline{M}_\omega X \supset \overline{M}_\tau X$. Для метричного компакта X всі ці множини рівні, тому вживаємо для них спільне позначення $\overline{M}X$. Множини всіх субнормованих та нормованих ємностей на X позначаємо відповідно $\underline{M}X$ та MX, додаючи для не обов'язково компактного X індекси d, ω і τ для підмножин з ємностей з відповідними властивостями.

Надалі всі ємності вважаємо регулярними та субнормованими, звідки $c(F) \leqslant 1$ для кожної розглядуваної ємності c і $F \underset{cl}{\subset} X$. Кожній функції c на $\operatorname{Exp} X$ зі значеннями в I відповідає її *підграфік*

$$\operatorname{sub} c = \{(F, \alpha) \in \exp X \times I \mid \alpha \leqslant c(F)\}.$$

Твердження 2.1. *Якщо функція c на* $\operatorname{Exp} X$ *має властивості (1), (2), то для множини* $S = \operatorname{sub} c$ *:*

1. $S \supset \exp X \times \{0\}$*;*
2. *з* $(F, \alpha) \in S$, $F \subset G \underset{cl}{\subset} X$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ *випливає* $(G, \beta) \in S$.

Підмножина $S \subset \exp X \times I$ *є графіком ємності на тихоновському просторі* (X, τ) *(ємності, регулярної щодо метрики* d *на* X*), якщо і тільки якщо вона задовольняє (1), (2) і є замкненою щодо топології добутку, де на* $\exp X$ *розглядається топологія Вієторіса (відповідно метрика Гаусдорфа).*

3 Метрики $\hat{d}$ та $\hat{\hat{d}}$

Надалі X — простір, топологія на якому визначена метрикою d.

Для ємностей $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$ позначимо

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \text{ для кожної } F \in \exp X : \\ c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_2(F), c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_1(F)\}.$$

Очевидно, що $0 \leqslant \hat{d}(c_1, c_2) \leqslant 1$.

Нагадаємо, що інтеграли Шоке та Суґено щодо ємності c на X від функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ за означенням рівні

$$\int_X \varphi(x)\, dc(x) = \int_0^{+\infty} c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geqslant \alpha\})\, d\alpha - \int_{-\infty}^0 (1 - c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geqslant \alpha\}))\, d\alpha$$

та

$$\int_X^{\vee} \varphi(x) \wedge dc(x) = \sup\{c(F) \wedge \inf_{x \in F'} \varphi(x) \mid F \underset{Cl}{\subset} X\}.$$

Нехай $\mathrm{Lip}(X,d)$ — множина всіх нерозтягуючих дійснозначних функцій на метричному просторі X. Якщо X — компакт, то для довільних $c_1, c_2 \in MX$ Зарічним [6] запроваджено величину

$$\hat{\hat{d}}(c_1,c_2) = \sup\{|\int_X \varphi(x)\, dc_1(x) - \int_X \varphi(x)\, dc_2(x)| \mid \varphi \in \mathrm{Lip}(X,d)\}.$$

Відомо, що для метричного компакта (X,d) функції $\hat{d}$ та $\hat{\hat{d}}$, перша з яких введена з використанням замкнутих ε-околів, а друга — з використанням нерозтягуючих функцій, є *метриками* на множині нормованих ємностей MX, які визначають ту саму компактну топологію [6].

Для інтеграла Суґено $\int_X^{\vee} \varphi(x) \wedge dc(x)$ вживаємо скорочення $c(\varphi)$ і розглянемо аналог метрики Зарічного $\hat{\hat{d}}$, для якого зберігаємо те ж позначення :

$$\hat{\hat{d}}(c_1,c_2) = \sup\{|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \mid \varphi \in \mathrm{Lip}(X,d)\},$$

де $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$.

Те, що $\hat{\hat{d}}$ — метрика, випливає з наступної теореми.

Теорема 1. *Для довільного метричного простору (X,d) функції $\hat{d}$ та $\hat{\hat{d}}$ на $\underline{M}_d X \times \underline{M}_d X$ є рівними.*

Доведення. Нехай $\hat{d}(c_1,c_2) \leqslant \varepsilon$ для $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$, тобто

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_2(F), \quad c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_1(F)$$

для кожної $F \underset{cl}{\subset} X$. Потрібно довести, що $|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ для довільної $\varphi \in \mathrm{Lip}(X,I)$.

Нехай $x \in \overline{O}_\varepsilon(F)$, тоді для будь-якого $\varepsilon' > \varepsilon$ існує таке $x_0 \in F$, що $d(x,x_0) < \varepsilon'$. Тоді для $\varphi \in \mathrm{Lip}(X,d)$ маємо $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant d(x,x_0) < \varepsilon'$. Враховуючи, що для кожного $\varepsilon > 0$ з того, що $F \subset \overline{O}_\varepsilon(F)$, випливає $\inf_{x \in F} \varphi(x) \geqslant \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x)$, отримуємо:

$$0 \leqslant \inf_{x_0 \in F} \varphi(x_0) - \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) \leqslant \varepsilon'.$$

Тому $\inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon' \geqslant \inf_{x \in F} \varphi(x)$, а при $\varepsilon' \to \varepsilon + 0$ матимемо:

$$\inf_{x \in F} \varphi(x) \leqslant \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon.$$

З останньої нерівності та формули метрики $\hat{d}$ отримаємо:

$$c_1(F) \wedge \inf_{x\in F} \varphi(x) \leqslant (c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon) \wedge (\inf_{x\in\overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon) = c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \wedge \inf_{x\in\overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon.$$

Взявши з обох боків нерівності супремуми, матимемо:

$$\begin{aligned} \sup\{c_1(F) \wedge \inf_{x\in F} \varphi(x) \mid F \underset{cl}{\subset} X\} &\leqslant \sup\{c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \wedge \inf_{x\in\overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) \mid F \underset{cl}{\subset} X\} + \varepsilon \\ &\leqslant \sup\{c_2(F') \wedge \inf_{x\in F'} \varphi(x) \mid F' \underset{cl}{\subset} X\} + \varepsilon, \end{aligned}$$

тобто

$$\overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_1(x) \leqslant \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_2(x) + \varepsilon.$$

Аналогічно до $c_1(\varphi) \leqslant c_2(\varphi) + \varepsilon$ можна отримати нерівність $c_2(\varphi) \leqslant c_1(\varphi) + \varepsilon$. Отже, $|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \leqslant \varepsilon$, а тому $\hat{\hat{d}}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$. Цим доведено, що $\hat{\hat{d}}(c_1, c_2) \leqslant \hat{d}(c_1, c_2)$.

В інший бік: нехай тепер $\hat{\hat{d}}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$. Доведемо, що $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$. Для кожної функції $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}(X, d)$ маємо:

$$|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| = \left| \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_1(x) - \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_2(x) \right| \leqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

Нехай для $F \underset{Cl}{\subset} X$ $c_1(F) > \varepsilon$, і нехай $\varphi(x) = \max\{0, c_1(F) - d(x, F)\}$. Тоді $\varphi(x) \leqslant c_1(F)$, а із цього та з означення інтеграла Суґено випливає, що $c_1(\varphi) = \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_1(x) = c_1(F)$, а $c_2(\varphi) = \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_2(x) \leqslant c_1(F)$. Враховуючи це разом із $(*)$, отримуємо:

$$\overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_2(x) \geqslant \overset{\vee}{\int_X} \varphi(x) \wedge dc_1(x) - \varepsilon > c_1(F) - \varepsilon - \triangle, \ \triangle > 0.$$

Існує $F' \underset{Cl}{\subset} X$ таке, що $c_2(F') \geqslant c_1(F) - \varepsilon - \triangle$ та $\varphi|_{F'} \geqslant c_1(F) - \varepsilon - \triangle > 0$ для будь-якого $\triangle > 0$.

Оскільки $F' \subset \overline{O}_{\varepsilon+\triangle}(F)$, то $c_2(\overline{O}_{\varepsilon+\triangle}(F)) \geqslant c_1(F) - \varepsilon - \triangle$. При $\triangle \to 0$ згідно регулярності ємності отримуємо

$$c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_1(F).$$

Таким чином, якщо $c_1(F) > \varepsilon$, то $c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_1(F)$. Якщо ж $c_1(F) \leqslant \varepsilon$, то $c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geqslant 0 \geqslant c_1(F) - \varepsilon$. Аналогічно на підставі симетричності метрики можна довести, що

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geqslant c_2(F).$$

Цим доведено, що $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$, а тому $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \hat{\hat{d}}(c_1, c_2)$.

Отже, $\hat{d}(c_1, c_2) = \hat{\hat{d}}(c_1, c_2)$. $\square$

Нагадаємо, що гіперпростором включення на метричному просторі X називаємо непорожню сім'ю $\mathcal{F}$ замкнених непорожніх підмножин X, таку, що:

1) $\mathcal{F} \subset \exp X$ — замкнена щодо метрики Гаусдорфа;

2) якщо $A \subset B \in \exp X$, $A \in \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$.

Сукупність гіперпросторів включення на X позначаємо GX і розглядаємо як підпростір метричного простору $\exp^2 X = \exp(\exp X)$ з метрикою d_{HH}.

На множині $\underline{M}_d X$ ємностей, регулярних щодо метрики d на X, розглядаємо метрику $\hat{d}$, означену вище.

Розглянемо довільний гіперпростір включення $\mathcal{F} \in GX$. Він породжує нормовану ємність на X, регулярну щодо d, за формулою

$$c_{\mathcal{F}}(F) = \begin{cases} 0, & F \notin \mathcal{F}, \\ 1, & F \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Порівняємо відстані Гаусдорфа між гіперпросторами включення і відстані між породженими ними ємностями.

Твердження 3.1. *Для довільних гіперпросторів включення $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in GX$ і відповідних ємностей $c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}$ виконано рівність*

$$\min\{d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), 1\} = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}).$$

Доведення. Оскільки при заміні метрики d на метрику $d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ відстань $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$ не змінюється, а $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ змінюється на $\min\{d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), 1\}$, без обмеження загальності можемо вважати, що метрика обмежена згори одиницею, і доводити, що відстань між сім'ями $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ та відстань між мірами $c_{\mathcal{F}_1}$ і $c_{\mathcal{F}_2}$, побудованими на основі цих сімей, є рівними, тобто $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$. Для цього потрібно показати для кожного $\varepsilon < 1$, що, якщо $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leqslant \varepsilon$, то $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leqslant \varepsilon$, та навпаки, якщо $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leqslant \varepsilon$, то $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leqslant \varepsilon$.

Нагадаємо, що метрики задані формулами:

$$\begin{aligned} d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid & \forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \ \exists F_2 \in \mathcal{F}_2 : d_H(F_1, F_2) \leqslant \varepsilon, \\ & \forall F_2 \in \mathcal{F}_2 \ \exists F_1 \in \mathcal{F}_1 : d_H(F_1, F_2) \leqslant \varepsilon\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \forall F \in \exp X : & \ c_{\mathcal{F}_1}(F) \leqslant c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, \\ & \ c_{\mathcal{F}_2}(F) \leqslant c_{\mathcal{F}_1}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що при $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2$, $d_H(F_1, F_2) \leqslant \varepsilon$ маємо, що $F_2 \subset \overline{O}_\varepsilon(F_1)$, звідки $\overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$.

Нехай $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leqslant \varepsilon$. Доведемо, що $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leqslant \varepsilon$. Розглянемо довільну непорожню замкнену множину $F \subset X$. Якщо $c_{\mathcal{F}_1}(F) = 0$, тобто $F \notin \mathcal{F}_1$, то $c_{\mathcal{F}_1}(F) \leqslant c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$. Інакше $F \in \mathcal{F}_1$, тому $\overline{O}_\varepsilon(F) \in \mathcal{F}_2$, звідки $c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) = 1$, і теж $1 = c_{\mathcal{F}_1}(F) \leqslant c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon = 1 + \varepsilon$.

Аналогічно отримуємо $c_{\mathcal{F}_2}(F) \leqslant c_{\mathcal{F}_1}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$ для кожної замкненої підмножини $F \subset X$, звідки випливає нерівність $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leqslant \varepsilon$.

Тепер залишилося показати, що при $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leqslant \varepsilon$ виконується $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leqslant \varepsilon$. Для будь-якої $F_1 \in \mathcal{F}_1$ маємо:

$$c_{\mathcal{F}_1}(F_1) \leqslant c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F_1)) + \varepsilon.$$

Оскільки $c_{\mathcal{F}_1}(F_1) = 1$, то, враховуючи $\varepsilon < 1$, маємо $c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F_1)) > 0$, тобто $\overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$. Отже, існує множина $F_2 = \overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$, $d_H(F_1, F_2) \leqslant \varepsilon$. Аналогічно для $F_2 \in \mathcal{F}_2$ маємо $F_1 = \overline{O}_\varepsilon(F_2) \in \mathcal{F}_1$, і теж $d_H(F_1, F_2) \leqslant \varepsilon$. Отже, $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leqslant \varepsilon$, а тому $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$. □

Отже, простір гіперпросторів включення можна вважати топологічним, а за умови $d \leqslant 1$ — і метричним підпростором простору ємностей.

Відомо, що, якщо (X, d) — повний метричний простір з обмеженою метрикою, то простір $\exp X$, наділений метрикою Гаусдорфа, є повним. Крім того, підпростір GX замкнений у повному просторі $\exp^2 X = \exp(\exp X)$, тому теж є повним.

Аналогічно можемо довести повноту простору субнормованих неадитивних мір, регулярних щодо повної метрики d на X. З допомогою Твердження 2.1 неважко перевірити, що сукупність підграфіків таких мір є замкненою у $\exp(\exp X \times I)$. Оскільки для довільних ємностей $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$ відстань $\hat{d}(c_1, c_2)$ дорівнює відстані Гаусдорфа між $\operatorname{sub} c_1$ і $\operatorname{sub} c_2$, то :

Теорема 2. *Якщо простір X є повним, то $(\underline{M}_d X, \hat{d})$ повний.*

Надамо також пряме доведення.

Доведення. Нехай $c_1, c_2, ..., c_n, \dots \in \underline{M}_d X$ — фундаментальна послідовність ємностей. При потребі перейшовши до підпослідовності, можемо вважати, що

$$\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \frac{1}{2}, \ \hat{d}(c_2, c_3) \leqslant \frac{1}{4}, \dots \ \hat{d}(c_n, c_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^n}, \dots .$$

Тоді для довільної замкненої множини $F \subset X$ виконано $c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i} \geqslant c_{i+1}(F)$, звідки

$$c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F))) + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} \geqslant c_{i+1}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i}.$$

Враховуючи, що $\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) \subset \overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)$, маємо:

$$c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)) + \frac{1}{2^{i-1}} \geqslant c_{i+1}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i},$$

тому числова послідовність $(c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)) + \frac{1}{2^{i-1}})_{i \in \mathbb{N}}$ є незростаючою і обмеженою знизу нулем. Позначимо її границю $c_0(F)$. Неважко перевірити, що функція c_0 є регулярною щодо d ємністю і границею послідовності ємностей $c_1, c_2, ..., c_n, \dots$. □

4 Порівняння класів ω- й τ-гладких ємностей на сепарабельних та несепарабельних просторах

Теорема 3. *Для ємностей на метричному просторі X властивості ω-гладкості й τ-гладкості є еквівалентними, якщо і тільки якщо X є сепарабельним.*

Доведення. Нехай X — сепарабельний простір, тобто в ньому міститься не більш ніж злічення всюди щільна множина A, c — ω-гладка ємність на X, $\mathcal{F} = (F_\alpha)$ — спадна спрямованість замкнених множин в X, де α належить деякій множині індексів з відношенням часткового порядку $(\mathcal{I}, \leqslant)$, $F_0 = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} F_\alpha$.

Позначимо $\mathbb{Q}_+ = (0; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ і покладемо

$$A_{\mathcal{F}} = \{(a, r) \mid a \in A, r \in \mathbb{Q}_+, B_r(a) \cap F_\alpha = \varnothing \text{ для деякого } \alpha \in \mathcal{I}\} \subset A \times \mathbb{Q}_+.$$

Для кожної скінченної підмножини $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$ покладемо $F_{\mathcal{H}} = X \setminus \bigcup\limits_{(a,r)\in\mathcal{H}} B_r(a)$. Ця множина є замкненою, і для будь-яких скінчених $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$ та $\mathcal{H}' \subset A_{\mathcal{F}}$ виконано рівність $F_{\mathcal{H}\cup\mathcal{H}'} = F_{\mathcal{H}} \cap F'_{\mathcal{H}}$. Крім того, для кожного $(a, r) \in A_{\mathcal{F}}$ за побудовою існує $F_\alpha \subset F_{\{(a,r)\}}$, тому за спрямованістю $\mathcal{I}$ вгору для кожної скінченної $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$ теж існує $F_\alpha \subset F_{\mathcal{H}}$. З іншого боку, $F_\alpha = \bigcap\limits_{F_{\mathcal{H}}\supset F_\alpha} F_{\mathcal{H}}$, тому перетин усіх $F_{\mathcal{H}}$ дорівнює перетину всіх F_α, тобто F_0.

Оскільки множина $A_{\mathcal{F}}$ зліченна, її можна зобразити як об'єднання послідовності скінченних підмножин $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3 \subset \dots$, звідки

$$c(F_0) = c(F_{\mathcal{H}_1} \cap F_{\mathcal{H}_2} \cap F_{\mathcal{H}_3} \cap \dots) = \inf\{c(F_{\mathcal{H}_1}), c(F_{\mathcal{H}_2}), c(F_{\mathcal{H}_3}), \dots\} \geqslant \inf_\alpha c(F_\alpha),$$

що й означає τ-гладкість ємності c.

Нехай тепер X несепарабельний, тоді існує множина $X_0 \subset X$ така, що $|X_0| = \omega_1$, та існує число $\varepsilon > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X_0$ виконується $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Розглянемо ємність, задану формулою:

$$c(F) = \begin{cases} 1, & |X_0 \setminus F| \leqslant \omega, \\ 0, & |X_0 \setminus F| > \omega. \end{cases}$$

Доведемо, що $c(F)$ є ω-гладкою ємністю, але не є τ-гладкою. Нехай (F_n) — деяка спадна спрямованість замкнених множин в X, збіжна до F_0. Тоді $F_0 = \bigcap\limits_n F_n$. Оскільки $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_0$, то з властивості монотонності ємності отримуємо нерівність $c(F_1) \geqslant c(F_2) \geqslant c(F_3) \geqslant \dots \geqslant c(F_0)$. Потрібно довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} c(F_n) = c(F_0)$. Якщо F_1 така, що $|X_0 \setminus F_1| > \omega$, то і $|X_0 \setminus F_0| > \omega$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty} c(F_n) = c(F_0) = 0$.

Нехай $|X_0 \setminus F_1| \leqslant \omega$, $|X_0 \setminus F_2| \leqslant \omega$, $|X_0 \setminus F_3| \leqslant \omega, \dots$. Тоді для будь-якого натурального числа n маємо $c(F_n) = 1$. Оскільки

$$(X_0 \setminus F_1) \cup (X_0 \setminus F_2) \cup (X_0 \setminus F_3) \cup \dots = \bigcup_n (X_0 \setminus F_n) = X_0 \setminus F_0,$$

то $X_0 \setminus F_0$ — зліченне об'єднання зліченних чи скінченних множин, яке також є не більш ніж зліченною множиною. Тому $c(F_0) = 1$. Отже $c(F)$ є ω-гладкою ємністю.

Тепер покажемо, що для ємності c властивість τ-гладкості не виконується. Нехай $2^{X_0}_f = \{B \subset X_0 \mid |B| \leqslant \omega\}$ — сім'я всіх не більш ніж зліченних підмножин множини X_0. Впорядкуємо цю множину за зростанням. Замкнені множини $F_B = X_0 \setminus B$ утворюють спадну спрямованість, і для кожної F_B ємність $c(F_B)$ рівна 1, але $\bigcap_{B\in 2^{X_0}} F_B = \varnothing$, а тому $c(\bigcap_{B\in 2^{X_0}} F_B) = 0$. Отже, $c(F)$ не є τ-гладкою ємністю. □

5 Порівняння класів регулярних, регулярних щодо метрики та ω–гладких ємностей на метризовних просторах

Для простору τ-гладких ємностей $M_\tau X$ відомо, що якщо X — компакт, то класи τ-гладких та регулярних ємностей на ньому співпадають, але у випадку некомпактних просторів це не так. Кожна τ-гладка ємність є регулярною, проте зворотне є хибним [4]. З'ясуємо, чи збігається простір ω-гладких ємностей $\underline{M}_\omega X$ з простором регулярних ємностей $\underline{M}X$.

Теорема 4. *Для метризовного простору X наступні твердження рівносильні:*

(1) *X компактний;*

(2) $\underline{M}_\omega X = \underline{M} X$;

(3) $\underline{M}_d X = \underline{M}_\omega X$ *для деякої метрики d, сумісної з топологією на X;*

(4) $\underline{M}_d X = \underline{M}_\omega X$ *для кожної метрики d, сумісної з топологією на X.*

Доведення. Якщо X — компакт, то класи $\underline{M} X$, $\underline{M}_\omega X$ та $\underline{M}_\tau X$ збігаються, тому з першого твердження випливають три інші. Очевидно, що з четвертого твердження випливає третє.

Якщо ж метризовний простір X некомпактний, то топологію на ньому можна визначити необмеженою метрикою d. Відповідно простір (X, d) не є цілком обмеженим, і існують $\varepsilon > 0$ і підмножина $A = (x_n \in X, n \in \mathbb{N})$ така, що $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ для кожних $x_i, x_j \in A$. Розглянемо функцію, задану формулою $c(F) = \max(1 - \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(x_n,F)}{\varepsilon}, 0)$. Зрозуміло, що $0 \leqslant c(F) \leqslant 1$ для будь-якої замкненої $F \subset X$. Також, якщо $F, G \in \exp X$, $F \subset X$, то $c(F) \leqslant c(G)$. Доведемо напівнеперервність згори. Якщо $c(F) < a$, то $1 - \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(x_n,F)}{\varepsilon} < a$, а тому $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, F) > (1-a)\cdot\varepsilon$. Позначивши $\delta = \frac{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} d(x_n,F) - (1-a)\cdot\varepsilon}{2}$, отримуємо $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, \overline{O}_\delta(F)) > (1-a)\cdot\varepsilon$, а тому $c(\overline{O}_\delta(F)) < a$. Отже, дана функція є регулярною ємністю.

Розглянемо спадну послідовність множин $F_n = \{x_i \in A \,|\, i \geqslant n\}$. Очевидно, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ маємо $c(F_n) = 1$, але $c(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = c(\varnothing) = 0$, тобто властивість ω-гладкості не виконано, і $\underline{M}_\omega X \neq \underline{M} X$.

Крім того, у некомпактному метризовному просторі X існує спадна послідовність замкнених множин $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ з порожнім перетином. Нехай метрика d сумісна з топологією на X. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка x_0 не належить до F_1. Покладемо для кожної замкненої $F \subset X$:

$$c(F) = \begin{cases} 0, & F = \varnothing, \\ \min\{1, \sup\{d(x_0, x) \mid x \in F\}\}, & F \neq \varnothing. \end{cases}$$

Тоді c субнормована і регулярна щодо метрики d, однак виконано $c(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = c(\varnothing) = 0$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} c(F_n) \geqslant d(x_0, F_1) > 0$, тому c не є ω-гладкою, і $\underline{M}_\omega X \neq \underline{M}_d X$.

Цим від супротивного показано, що з другого або третього тверджень випливає перше твердження, тобто маємо потрібну рівносильність. □

Зрозуміло, що рівність $\underline{M} X = \underline{M}_d X$ залежить від вибору конкретної сумісної з топологією на X метрики d, однак:

Теорема 5. *Якщо множина граничних точок метричного простору X не компактна, то на X існує регулярна ємність, яка не є регулярною щодо жодної метрики, сумісної з топологією на X. Якщо ж множина граничних точок метричного простору X є компактною, то існує сумісна з топологією на X метрика, щодо якої є регулярною кожна регулярна (у топологічному сенсі) ємність на X.*

Доведення наступного допоміжного твердження є очевидним.

Лема 5.1. *Нехай* $(a_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ *— нескінченно малі послідовності додатніх чисел. Тоді існує така бієкція* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *що послідовність* $a_n^{\varphi(n)}$ *містить як завгодно малі елементи.*

Для довільної замкненої множини $A \subset X$ задамо функцію $c_A : \operatorname{Exp} X \to I$ формулою:

$$c_A(F) = \begin{cases} 1, F \supset A \\ 0, F \not\supset A, \end{cases}$$

для кожної замкненої $F \subset X$. Очевидно, що ця функція є регулярною ємністю. Вживаємо позначення $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}} f_i$ для поаргументного інфімуму сім'ї функцій $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ зі спільною областю визначення. Зауважимо, що поаргументний інфімум регулярних ємностей є регулярною ємністю.

Доведення теореми. Нехай множина граничних точок простору X некомпактна. Тоді для довільної метрики d, сумісної з топологією на X, можна знайти послідовність граничних точок $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ простору X без збіжних підпослідовностей і попарно диз'юнктні замкнені кулі B_0^n щодо d з центрами у цих точках x_n. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовність $(B_i^n)_{i\in\{0,1,2,\dots\}}$ куль з центром x_n і спадними до нуля радіусами так, щоб $B_{i-1}^n \setminus B_i^n \neq \varnothing$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Позначимо Φ множину всіх бієкцій $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Для кожного $\varphi \in \Phi$ покладемо $A_\varphi = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i^{\varphi(i)}$, тоді зі сказаного вище зрозуміло, що множина A_φ замкнена і функція $c = \bigwedge_{\varphi\in\Phi} c_{A_\varphi}$ є регулярною ємністю. Зауважимо, що значення c від довільної замкненої множини $F \subset X$ рівне нулю, якщо існує така перестановка $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що F не перетинає жодну з куль $B_1^{\varphi(1)}, B_2^{\varphi(2)}, B_3^{\varphi(3)}, \dots$, інакше $c(F) = 1$. Зокрема, $c(F) = 1$, якщо F містить одну з точок x_n.

Припустимо, що c регулярна щодо деякої сумісної з топологією на X метрики d'. Для кожного натурального n послідовність додатніх чисел $a_i^n = \sup\{d'(x, x_n) \mid x \in B_{i-1}^n \setminus B_i^n\}$, $i \in \mathbb{N}$, прямує до нуля. За останньою лемою знайдемо таку перестановку $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що для відповідно переставлених послідовностей $(a_i^{\varphi(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ діагональна послідовність $(a_n^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ містить як завгодно малі елементи. Оберемо по одній точці y_n з кожної різниці $B_{n-1}^{\varphi(n)} \setminus B_n^{\varphi(n)}$ і позначимо $Y = \operatorname{Cl}(\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. За побудовою $c(Y) = 0 < 1$, і повинно існувати таке $\varepsilon > 0$, що для кожної непорожньої замкненої множини $F \subset X$ з $d'_H(F, Y) \leqslant \varepsilon$ випливає $c(F) < 1$, тобто $c(F) = 0$. Але існує $n \in \mathbb{N}$, для якого $d'(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leqslant a_n^{\varphi(n)} < \varepsilon$, звідки для множини $F = Y \cup \{x_{\varphi(n)}\}$ водночас $d'_H(F, Y) \leqslant \varepsilon$ і $c(F) = 1$ — суперечність.

Отже, побудована регулярна ємність c не є регулярною щодо жодної метрики d', сумісної з топологією на X.

Нехай тепер множина X_0 граничних точок простору X є компактною, d — довільна метрика, сумісна з топологією на X. Формула

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ d(x, y) + d(x, X_0) + d(y, X_0), & x \neq y, \end{cases} \quad x, y \in X,$$

визначає метрику на X, топологічно еквівалентну до d, але з властивістю: якщо U — відкритий окіл замкненої множини F в X, то для деякого $\varepsilon > 0$ виконано $\overline{O}_\varepsilon(F) \subset U$. Звідси негайно випливає, що кожна ємність $c \in \underline{M}X$ є регулярною щодо d'. $\square$

ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

У цій роботі з'ясовано тільки умови збігу різних класів регулярних мір на метричних і метризованих просторах. Топологічні властивості просторів таких мір з розглянутою метрикою (за винятком вже доведеної повноти простору регулярних щодо повної метрики ємностей) стануть предметом наступних публікацій. Зокрема, ці простори буде вивчено засобами нескінченновимірної топології.

REFERENCES

[1] Banakh T.O. *Topology of spaces of probability measures, I: The functors P_τ and $\hat{P}$.* Mat. Stud. 1995, **5**, 65–87. (in Russian)

[2] Choquet G. *Theory of Capacity.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1953–1954, **5**, 131–295.

[3] Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology: fundamental constructions. MGU Publ., Moscow, 1988. (in Russian)

[4] Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Inclusion hyperspaces and capacities on Tychonoff spaces: functors and monads.* Topology Appl. 2010, **157** (15), 2421–2434. doi:10.1016/j.topol.2010.07.032

[5] O'Brien G.L., W. Verwaat. *How subsadditive are subadditive capacities?* Comment. Math. Univ. Carolinae 1994, **35** (2), 311–324.

[6] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta.* Sbornik: Mathematics 2008, **199** (2), 159–184. doi:10.4213/sm1504

Надійшло 04.02.2014

Cherkovskyi T.M. *Regular capacities on metrizable spaces*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 166–176.

It is proved that for a (not necessarily compact) metric space: the metrics on the space of capacities in the sense of Zarichnyi and Prokhorov are equal; completeness of the space of capacities is equivalent to completeness of the original space. It is shown that for the capacities on metrizable spaces the properties of ω-smoothness and of τ-smoothness are equivalent precisely on the separable spaces, and the properties of ω-smoothness and of regularity w.r.t. some (then w.r.t. any) admissible metric are equivalent precisely on the compact spaces.

Key words and phrases: regular capacity, ω-smoothness, τ-smoothness, Hausdorff metric, complete metric space, separable space.

Черковский Т.М. *Регулярные емкости на метризуемых просторанствах* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 166–176.

Доказано, что для (не обязательно компактного) метрического пространства: метрики на пространстве емкостей в стиле Прохорова и Заричного равны; полнота пространства емкостей равносильна полноте исходного пространства. Показано, что для емкостей на метризуемых пространствах свойства ω-гладкости и τ-гладкости равносильны в точности на сепарабельных пространствах, а свойства ω-гладкости и регулярности относительно некоторой (а тогда и любой) совместимой метрики — в точности на компактных просторанствах.

Ключевые слова и фразы: регулярная емкость, ω-гладкость, τ-гладкость, метрика Хаусдорфа, полное метрическое пространство, сепарабельное пространство.