ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 191–195
doi:10.15330/cmp.6.2.191-195

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.191–195

Барабаш Г.М., Холявка Я.М.

НАБЛИЖЕННЯ МОДУЛЯРНИХ ІНВАРІАНТІВ, ПЕРІОДІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Нехай $\operatorname{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, — алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі. Отримано оцінку сумісного наближення модулярних інваріантів цих функцій, їх періодів, довільного числа α та значень кожної з цих функцій в періодах іншої та в точці α.

Ключові слова і фрази: сумісні наближення, еліптична функція Якобі.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: galynabarabash71@gmail.com (Барабаш Г.М.), ya_khol@franko.lviv.ua (Холявка Я.М.)

Вступ

В роботах [1, 3, 4] наведено багато результатів, що дають оцінки сумісного наближення значень в алгебраїчних точках еліптичних функцій Вейєрштрасса з алгебраїчними інваріантами, значень цих функцій в періодах інших функцій тощо. У цій праці отримано оцінку сумісного наближення значень двох алгебраїчно незалежних функцій Якобі зі спільним періодом у довільній точці α та кожної з цих функцій у тому періоді іншої функції, який не є спільним для них, та їх модулярних інваріантів. Жодних припущень про алгебраїчну природу числа α, модулярних інваріантів та періодів немає. Розглянуто довільні фіксовані пари основних періодів цих двох функцій та накладено природну вимогу на них та на число α, яка дає змогу уникнути точок, що є полюсами функцій.

Розглянемо алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі $\operatorname{sn}_1(z)$, $\operatorname{sn}_2(z)$ з модулярними інваріантами $\varkappa_1, \varkappa_2$ відповідно, $0 < \varkappa_1^2, \varkappa_2^2 < 1$, які мають спільний період. Позначимо через $(4K, 2iK_1)$ довільну фіксовану пару основних періодів функції $\operatorname{sn}_1(z)$, а через $(4K, 2iK_2)$ — функції $\operatorname{sn}_2(z)$ [5].

Надалі як і в [4] будемо позначати через $d(P)$, $L(P)$ степінь та довжину многочлена P; $\xi_1, \ldots, \xi_{10}$ — наближаючі алгебраїчні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їх степені та довжини відповідно, $d = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_{10})$. Нехай α таке довільне число, що точки $4nK + 2in_1K_1 + 2in_2K_2 + \alpha$ не є полюсами $\operatorname{sn}_1(z)$, $\operatorname{sn}_2(z)$ при усіх $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Теорема. *Для довільних алгебраїчних чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{10}$ справджується*

$$\begin{aligned} \max \big\{ &|\alpha - \xi_1|, |K - \xi_2|, |K_1 - \xi_3|, |\varkappa_1 - \xi_4|, |\varkappa_2 - \xi_5|, |\operatorname{sn}_2(2iK_1) - \xi_6|, \\ &|\operatorname{sn}_1(\alpha) - \xi_7|, |\operatorname{sn}_2(\alpha) - \xi_8|, |K_2 - \xi_9|, |\operatorname{sn}_1(2iK_2) - \xi_{10}| \big\} > \exp\big(-\Lambda D^3\big), \end{aligned} \tag{1}$$

де $D^2 = d\left(\dfrac{\ln L_1}{d_1} + \cdots + \dfrac{\ln L_{10}}{d_{10}} + \ln d\right)$, $\Lambda > 0$ *— константа, залежна лише від чисел $\varkappa_1, \varkappa_2$ та α.*

УДК 511.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J82, 11J89.

Доведення теореми

Доводити теорему будемо методом Гельфонда–Чудновського, викладеним у [1,3].

Нехай λ — достатньо велике натуральне число, $c_1, c_2, \ldots$ — додатні константи, які не залежать від d, d_i, L_i та λ.

Покажемо, що нерівність

$$\max\big\{|\alpha-\xi_1|, |K-\xi_2|, |K_1-\xi_3|, |\varkappa_1-\xi_4|, |\varkappa_2-\xi_5|, |\operatorname{sn}_2(2iK_1)-\xi_6|, \\ |\operatorname{sn}_1(\alpha)-\xi_7|, |\operatorname{sn}_2(\alpha)-\xi_8|\big\} < \exp\big(-\lambda^8 M^3\big), \tag{2}$$

де

$$n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_8), \quad M^2 = n\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \cdots + \frac{\ln L_8}{d_8} + \ln n\right), \tag{3}$$

неможлива. Доводити будемо методом від супротивного. Покладемо

$$L = S = [\lambda^2 M], \quad N = [\lambda M]. \tag{4}$$

Позначимо через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1}, \ldots, \xi_8^{u_8}$, $u_i = 0, 1, \ldots, d_i - 1$,

$$F(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} z^k \operatorname{sn}_1^{l_1}(z)\operatorname{sn}_2^{l_2}(z), \quad C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau, \quad C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Нехай $\varphi_1(z) = \operatorname{sn}_2(z+K)$, $\varphi_2(w) = \operatorname{sn}_2(z+3K)$ [1]. Тоді

$$\operatorname{sn}_2(z+w) = \frac{\varphi_1(z)\varphi_2'(w) + \varphi_2(w)\varphi_1'(z)}{1-\varkappa_2^2\varphi_1^2(z)\varphi_2^2(w)} = \frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \tag{6}$$

Існують (див. [1]) такі многочлени $G_{s,p,l}$, що

$$G_{s,p,l} = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_1^p(z,w)\Lambda_2^l(z,w))|_{w=0} \tag{7}$$

та справджуються оцінки $\ln L(G_{s,p,l}) \le s\ln(s(p+l) + c_1(s+p+l))$, $\deg G_{s,p,l} \le 4(p+l)$.

З (5)–(7) подібно, як у працях [1,6], отримаємо

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_2^{-L}(z,w)(F(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}\Lambda_2^{-L}(z,w)\right)|_{w=0}$$

$$\times \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k \operatorname{sn}_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{8}$$

Позначимо

$$F_{s,t}(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k \operatorname{sn}_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{9}$$

Визначимо наближаючі алгебраїчні числа $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ так: $\xi_{11}^2 = (1-\xi_7^2)(1-\xi_4^2\xi_7^2)$, $\xi_{12}^2 = (1-\xi_8^2)(1-\xi_5^2\xi_8^2)$, $\xi_{13}^2 = (1-\xi_6^2)(1-\xi_5^2\xi_6^2)$. Для короткого запису $\xi_1, \ldots, \xi_8, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ будемо використовувати $\widetilde{\xi}$. Через $F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi})$ та $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})$ позначимо вирази, отримані з

$F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha)$ та $F_{s,t}(4nK+2in_1K_1+\alpha)$ заміною чисел α, $4K$, $2iK_1$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\mathrm{sn}_2(2iK_1)$, $\mathrm{sn}_1(\alpha)$, $\mathrm{sn}_2(\alpha)$, $\mathrm{sn}_1'(\alpha)$, $\mathrm{sn}_2'(\alpha)$, $\mathrm{sn}_2'(2iK_1)$ числами $\widetilde{\xi}$ відповідно.

Розглянемо $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})$, $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$, як N^2S лінійних форм від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно [7, лема 4.1] та (4), (9), виберемо не всі рівні нулю числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$

$$F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi}) = 0, \quad 0 < |C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3 n^{-1}M^3). \tag{10}$$

З (2), (3), (4), (10) при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha) - F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi})| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \tag{11}$$

З (8)–(11), якщо $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le s \le S$, дістанемо

$$|F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \tag{12}$$

Покажемо, що оцінка (12) виконується також і для $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$. Для цього скористаємося методом математичної індукції. Нехай при $0 \le s \le S$ нерівність (12) справджується для $1 \le n, n_1 \le 2^d N$, $2^d \le \lambda$. Доведемо, що тоді вона справджується і для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$.

Позначимо $(2\omega_{1,i}, 2\omega_{3,i})$ пару основних періодів функції Вейєрштрасса $\wp_i(z)$, якій відповідає $\mathrm{sn}_i(z)$, $e_{1,i} = \wp(\omega_{1,i})$, $e_{3,i} = \wp(\omega_{3,i})$, $i = 1, 2$. Покладемо

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L\left((z+iK_1')/\sqrt{e_{1,1}-e_{3,1}}\right)\sigma_2^L\left((z+iK_2')/\sqrt{e_{1,2}-e_{3,2}}\right). \tag{13}$$

Виберемо таке найменше можливе ціле r, що $r > 16(2^dN+1)(|K|+|K_1|+|K_2|+|\alpha|)$. Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4), (5), (10), (13) випливає

$$|G(z)|_{|z|\le R} < \exp(-c_3 2^d\lambda^4 M^3). \tag{14}$$

З [7, лема 4.5] та (14) при $0 \le s \le S$ отримаємо

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le r} < \exp(-2^d\lambda^5 M^3). \tag{15}$$

Так як $4nK+2in_1K_1+\alpha$ не є полюсами $\mathrm{sn}_1(z)$ та $\mathrm{sn}_2(z)$, то для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, 4nK+2in_1K_1+\alpha)$ точок $4nK+2in_1K_1+\alpha$ при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$ з (4) отримаємо

$$|\sigma_1^L\left((z+iK_1')/\sqrt{e_{1,1}-e_{3,1}}\right)|_{z\in V(\varepsilon,4nK+2in_1K_1+\alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4M^2). \tag{16}$$

З (15), (16) при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$ випливає

$$|F(z)|_{z\in V(\varepsilon,4nK+2in_1K_1+\alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 M^3). \tag{17}$$

З (14)–(16) для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, $0 \le s \le S$, отримаємо

$$|F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{3}M^3). \tag{18}$$

Враховуючи (11), для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$ та $0 \le s \le S$ з (18) випливає

$$|F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi})| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{4}M^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})$, $0 \le t \le s \le S$, $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, як значення відповідного многочлена в алгебраїчних точках, з [7, лема 4.1], (3) та (4) отримаємо для $F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi}) \neq 0$ оцінку $|F_{s,t,n,n_1}(\widetilde{\xi})| > \exp(-\lambda^{3,5}M^3)$, тому

$$|F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi})| > \exp(-\lambda^4 M^3). \tag{20}$$

Оцінки (19) та (20) суперечливі, тому для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$, $0 \le t \le s \le S$, отримаємо $F_{s,n,n_1}(\widetilde{\xi}) = 0$, що разом з (11) доводить (12) для $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Покладемо

$$\alpha_t = \left(1 - \frac{t}{\lambda L}\right)\frac{4K + 2iK_1 + \alpha}{4}, \quad t = 1, \ldots, L. \tag{21}$$

З (4), (21) випливає

$$|\operatorname{sn}(\alpha_t) - \operatorname{sn}(\alpha_j)| > \exp(-\lambda \ln M),\ t \neq j. \tag{22}$$

З [2, лема 4] отримаємо таке: нехай $F(z)$ визначена в (5),

$$\Delta = \det(\operatorname{sn}_1^{l_1}(\alpha_t))_{l_1,t=1,\ldots,L}\,, \qquad \Delta(t) = \det(\operatorname{sn}_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t))_{l_2,n_1=1,\ldots,L}\,,$$

$$\Delta(n_1, t) = \det((4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)^k)_{n,k=1,\ldots,L}\,,$$

$\Delta_{l_1,t}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\operatorname{sn}_1^{l_1}(\alpha_t)$ визначника Δ, $\Delta_{l_2,n_1}(t)$ — елемента $\operatorname{sn}_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t)$ визначника $\Delta(t)$, $\Delta_{k,n}(n_1,t)$ — елемента $(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)^k$ визначника $\Delta(n_1,t)$. Якщо Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t) \neq 0$, то

$$C_{k,l_1,l_2} = \sum_{t,\,n,\,n_1=1}^{L} \frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\frac{\Delta_{k,n}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}F(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t). \tag{23}$$

З (21), (22) випливає, що Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t)$, які є визначниками Вандермонда, відмінні від нуля. Використовуючи [3, лема 5.7], співвідношення (4), (22), отримаємо

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\right|, \left|\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\right|, \left|\frac{\Delta_{n,k}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}\right| < \exp(c_5\lambda^3 N \ln N). \tag{24}$$

Для $1 \le n, n_1 \le L$, $z = 4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t$ справджується $\min|\sigma^L(z)| > \exp(-c_6\lambda^6M^3)$, тому з (17) при $(1/2)\lambda \le 2^d \le \lambda$ отримаємо $|f(4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)| < \exp(-(1/4)\lambda^7M^3)$. Звідси і з (23), (24) випливає

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp(-\lambda^6M^3). \tag{25}$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного многочлена (5) $\mathrm{P}_{k,p,l} \in \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_8]$ в точці $\xi_1, \ldots, \xi_8$ і використовуючи (4) та [7, лема 4.1], для $C_{k,l_1,l_2} \neq 0$ отримаємо оцінку $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^4M^3)$, що суперечить оцінці (25). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулеві. Але тоді з (5) і всі $C_{k,l_1,l_2,\,\tau}$ дорівнюють нулеві, що суперечить (10). Останнє протиріччя показує, що (2) не справджується, тобто оцінка, подібна (1), справджується при сумісному наближенні чисел $\alpha, K, K_1, \varkappa_1, \varkappa_2$, $\operatorname{sn}_2(2iK_1), \operatorname{sn}_1(\alpha), \operatorname{sn}_2(\alpha)$. Якщо в (2) замінити K_1 на K_2 і $\operatorname{sn}_2(2iK_1)$ на $\operatorname{sn}_1(2iK_2)$ та розглядати точки $4nK + 2in_2K_2 + \alpha$, то отримаємо, що припущення (2) не справджується також і для чисел $\alpha, K, K_2, \varkappa_1, \varkappa_2, \operatorname{sn}_1(2iK_2), \operatorname{sn}_1(\alpha),\ \operatorname{sn}_2(\alpha)$, тобто для обох цих множин чисел справджується оцінка, подібна (1). Отже, при достатньо великому Λ справджується оцінка (1), що й потрібно було довести.

References

[1] Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*. Invent. Math. 1980, **61**, 267–290.

[2] Fel'dman N.I. *Algebraic independence of certain numbers*. Vestn. Mosk. Univ. 1980, **4**, 46–50. (in Russian)

[3] Fel'dman N.I. Hilbert's seventh problem. Mosk. Gos. Univ., Moskow, 1982. (in Russian)

[4] Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] Lawden D.F. Elliptic functions and applications. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function*. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 1995, **59** (4), 155–178. (in Russian)

[7] Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*. Bull. Soc. Math. France. 1980, **1**, 47–79.

Надійшло 19.09.2014

Barabash G.M, Kholyavka Y.M. *Approximation of modulus, periods and values of two Jacobi elliptic functions*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 191–195.

Let $\mathrm{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, be algebraically independent Jacobi elliptic functions. We obtain an estimation of a simultaneous approximation of modulus of these functions, their periods, arbitrary number α and the values of each of these functions at the periods of the other function and at the point α.

Key words and phrases: simultaneous approximations, Jacobi elliptic function.

Барабаш Г.М., Холявка Я.М. *Приближения модулярных инвариантов, периодов и значений двух эллиптических функций Якоби* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 191–195.

Пусть $\mathrm{sn}_i(z)$, $i = 1, 2$, — алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби. Получено оценку совместного приближения модулярных инвариантов этих функций, их периодов, произвольного числа α и значений каждой из этих функций в периодах другой и в точке α.

Ключевые слова и фразы: совместные приближения, эллиптичекая функция Якоби.