Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Дмитришин М.І.

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ АБСТРАКТНИХ ПРОСТОРІВ БЄСОВА

Дмитришин М.І. *Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 241–246.

Доведено інтерполяційну теорему для тензорних добутків абстрактних просторів Бєсова, асоційованих з замкненими операторами в банахових просторах, та показано її застосування до проблеми апроксимацій елементів тензорних добутків банахових просторів.

Вступ

У праці [3], користуючись векторами експоненціального типу (див. [4]) замкненого лінійного оператора в банаховому просторі, визначено і досліджено поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова, асоційованого з довільним таким оператором. Показано застосування абстрактного простору Бєсова до проблеми апроксимацій елементів банахового простору векторами експоненціального типу заданого замкненого оператора. У цьому зв'язку слід відзначити також праці [2, 5].

У даній статті показано, що тензорний добуток абстрактних просторів Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу.

1 Означення і попередні відомості

Нехай $\left\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\right\}_{j=1}^{J}$ — скінченний набір банахових просторів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j^J \mathfrak{X}_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.

Ключові слова і фрази: тензорні добутки, абстрактні простори Бєсова, інтерполяційні простори.

де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^{N} \otimes_j^J x_n^j$ із скінченним N, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j^J x_n^j \equiv x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathfrak{X}_J$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$, $j = 1, \ldots, J$, розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \leq p_j \leq \infty$ визначимо банахові простори цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \equiv \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \; \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j}}{\nu_j^{k p_j}} \right)^{1/p_j} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j) \equiv \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \; \|x\|_{\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}}{\nu_j^k} < \infty \right\}.$$

Розглянемо об’єднання $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j > 0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \|x\|_{\mathfrak{X}_j} + \inf\{\nu_j > 0 : x \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\},$$

і побудуємо тензорний добуток $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j) \equiv \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^{N} |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Для $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$, використовуючи позначення праці [6], визначимо інтерполяційний простір $\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} = \Big(\int_0^{\infty} \big[t^{-\theta} \mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j)\big]^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q},$$

де $\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) = \inf_{w = u + v} \big(|u|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j}\big)$, $u \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j$.

Для чисел $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau_j \leq \infty$ визначимо апроксимаційні простори між квазінормованим підпростором $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і банаховим простором $\mathfrak{X}_j$

$$\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j) = \big\{ x \in \mathfrak{X}_j : \; |x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} < \infty \big\},$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\infty} \big(t^{\alpha} E_{p_j}(t,x)\big)^{\tau_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau_j} & : \;\; 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\alpha} E_{p_j}(t,x) & : \;\; \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t,x) = \inf\limits_{|a|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \leq t} \|x - a\|_{\mathfrak{X}_j}$, $a \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $x \in \mathfrak{X}_j$. Простір $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)$ назвемо *абстрактним простором Бесова* [3].

Нехай $0<\theta<1$ і $[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ позначає простір $\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)$, наділений квазінормою $|x|^{\theta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)}$, а $\otimes^J_j[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ — тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes^J_j[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}=\inf_{w=\sum_n\otimes^J_j x^j_n}\sum_{n=1}^{N}|x^1_n|^{\theta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p_1,\tau_1}(A_1)}\cdot\ldots\cdot|x^J_n|^{\theta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p_J,\tau_J}(A_J)},$$

$\tilde{\otimes}^J_j[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ — поповнення простору $\otimes^J_j[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ у цій квазінормі.

2 Основні результати

Теорема 1. *Нехай $1\le p_j,q,q_j,\tau_j\le\infty$, $0<\theta<1$. Тоді при $\tau_j=\theta q_j$, $\theta=\dfrac{1}{\alpha+1}$ і $\dfrac{1}{q}-1=\sum_{j=1}^{J}\Big(\dfrac{1}{q_j}-1\Big)$ виконується така рівність*

$$\big(\tilde{\otimes}^J_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}^J_j\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}=\tilde{\otimes}^J_j[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}. \tag{1}$$

Доведення. Покажемо, що

$$\big(\tilde{\otimes}^J_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}^J_j\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}=\tilde{\otimes}^J_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}, \tag{2}$$

де $\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}$ — інтерполяційний простір з квазінормою

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}=\Big(\int_0^{\infty}\big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j)\big]^{q_j}\frac{dt}{t}\Big)^{1/q_j},$$

$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j)=\inf\limits_{x=x_0+x_1}\big(|x_0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}+t\,\|x_1\|_{\mathfrak{X}_j}\big)$, $x_0\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $x_1\in\mathfrak{X}_j$.

Дійсно, оскільки

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}^J_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}^J_j\mathfrak{X}_j)=\inf_{w=u+v}\big(|u|_{\tilde{\otimes}^J_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}+t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}^J_j\mathfrak{X}_j}\big)\\
&=\inf_{\sum_n\otimes^J_j x^j_n=\sum_n\otimes^J_j u^j_n+\sum_n\otimes^J_j v^j_n}\Bigg(\inf_{u=\sum_n\otimes^J_j u^j_n}\sum_{n=1}^{N}|u^1_n|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\cdot\ldots\cdot|u^J_n|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}\\
&+t\inf_{v=\sum_n\otimes^J_j v^j_n}\sum_{n=1}^{N}\|v^1_n\|_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot\|v^J_n\|_{\mathfrak{X}_J}\Bigg)\\
&\le\inf_{\sum_n\otimes^J_j x^j_n=\sum_n\otimes^J_j u^j_n+\sum_n\otimes^J_j v^j_n}\Bigg(\sum_{n=1}^{N}|u^1_n|_{\mathcal{E}_{p_1}}\cdot\ldots\cdot|u^J_n|_{\mathcal{E}_{p_J}}+t\sum_{n=1}^{N}\|v^1_n\|_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot\|v^J_n\|_{\mathfrak{X}_J}\Bigg)\\
&\le\sum_{n=1}^{N}\inf_{x^1_n=u^1_n+v^1_n}\big(|u^1_n|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}+\tau\|v^1_n\|_{\mathfrak{X}_1}\big)\cdot\ldots\cdot\inf_{x^J_n=u^J_n+v^J_n}\big(|u^J_n|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}+\tau\|v^J_n\|_{\mathfrak{X}_J}\big)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\mathcal{K}(\tau,x^1_n;\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)\cdot\ldots\cdot\mathcal{K}(\tau,x^J_n;\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J),\quad\tau^J=t,
\end{aligned}$$

то, використовуючи нерівність Юнга, маємо

$$\int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\big]^q\frac{dt}{t} \le J\sum_{n=1}^N\int_0^\infty \big[\tau^{-\theta J}\mathcal{K}(\tau,x_n^1;\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\mathcal{K}(\tau,x_n^J;\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J)\big]^q\frac{d\tau}{\tau}\le J\sum_{n=1}^N\Big(\int_0^\infty\big[\tau^{-\theta}\mathcal{K}(\tau,x_n^1;\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)\big]^{q_1}\frac{d\tau}{\tau}\Big)^{q/q_1}\ldots$$
$$\ldots\Big(\int_0^\infty\big[\tau^{-\theta}\mathcal{K}(\tau,x_n^J;\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J)\big]^{q_J}\frac{d\tau}{\tau}\Big)^{q/q_J},\quad \frac{1}{q}-1=\sum_{j=1}^J\Big(\frac{1}{q_j}-1\Big).$$

Тому

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le J\inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1\right)_{\theta,q_1}}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J\right)_{\theta,q_J}},$$

тобто

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le J|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}},$$

звідки випливає вкладення

$$\tilde{\otimes}_j^J\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}\subset\big(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}. \tag{3}$$

З іншого боку, використовуючи інтерполяційні нерівності

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}\le c_{\theta,q_j}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_j},\quad x\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j),$$
$$\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le c_{\theta,q}t^\theta|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}, w\in\big(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}, \tag{4}$$

та нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned}
|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} &= \inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1\right)_{\theta,q_1}}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J\right)_{\theta,q_J}}\\
&\le \inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N c_{\theta,q_1}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot c_{\theta,q_J}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_J}\\
&\le c'_{\theta,q_j}\inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\Big(\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}+\sum_{n=1}^N\|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot\|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}\Big)\\
&\le c''_{\theta,q_j}t^{-\theta}\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le C_{\theta,q}|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}
\end{aligned}$$

для $w=\sum_{n=1}^N\otimes_j^J x_n^j\in\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}$ таких, що $x_n^j\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$. Оскільки простір $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ щільний в просторі $\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}$, то

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}\le C_{\theta,q}|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}$$

для всіх $w \in \big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q}$. Звідси отримуємо

$$\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j^J \big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}. \tag{5}$$

Із вкладень (3) і (5) випливає рівність (2).

Згідно з теоремою 7.1.7 з книги [1], справедливий наступний ізоморфізм квазінормованих просторів

$$\big[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)\big]^{\theta} = \big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}, \quad |x|^{\theta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)} \sim |x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}, \tag{6}$$

де $\tau_j = \theta q_j$ і $\theta = \dfrac{1}{\alpha+1}$. З рівностей (6) і (2) отримаємо рівність (1). $\square$

Теорема 2. *Існують такі числа $c_1(\alpha,\tau_j)$, $c_2(\alpha,\tau_j)$, що виконуються нерівності*

$$E(t,w) \le c_1 t^{-\alpha} |w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}, \ w \in \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}, \tag{7}$$

$$|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}} \le c_2 |w|^{\alpha}_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j}, \ w \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tag{8}$$

де $E(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.11.4(b) з книги [1], для деякого додатного числа c маємо $|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le c\,|w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^{\theta}_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j}$, $w \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$. З цієї нерівності та рівності (1) при $\alpha = (1-\theta)/\theta$ випливає існування такої константи $c_1 > 0$, що виконується нерівність (8).

З інтерполяційної нерівності (4) та рівності (1) випливає існування такої константи $c_0 > 0$, що

$$\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) \le c_0 t^{\theta} |w|_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}, \quad w \in \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}.$$

Покладемо $\mathcal{K}_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) = \inf\limits_{w=u+v} \max\big\{|u|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)}, t\|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j}\big\}$. Оскільки $\mathcal{K}_\infty \le \mathcal{K}$, то

$$\mathcal{K}_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) \le c_0 t^{\theta} |w|_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}, \quad w \in \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}. \tag{9}$$

Згідно з лемою 7.1.2 з [1], для кожного $t > 0$ існує таке $s > 0$, що $\mathcal{K}_\infty = s$ і $E(s+0,w) \le s/t \le E(s-0,w)$. Звідси та з нерівності (9) маємо

$$s^{1-\theta}[E(s,w)]^{\theta} \le c_0 |w|_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}, \quad w \in \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}.$$

При $\alpha = (1-\theta)/\theta$ отримуємо $s^{\alpha} E(s,w) \le c_0^{\alpha+1} |w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}}$, $w \in \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$. Покладаючи $c_1 = c_0^{\alpha+1}$, отримуємо нерівність (7). $\square$

Література

1. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — 264 с.
2. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т.47, №5. — С. 616–628.
3. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах* // Доп. НАН України. — 2007. — №12. — С. 16–22.
4. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа* // Докл. АН БССР. — 1983. — Т.27, №9. — С. 791–793.
5. Радзиевский Г.В. *Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени* // Мат. сб. — 1998. — Т.189, №4. — С. 83–124.
6. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 28.02.2012

Dmytryshyn M.I. *Tensor products of abstract Besov spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 241–246.

We prove the interpolation theorem for tensor products of abstract Besov spaces, associated with closed operators in Banach spaces and show its application to the problems of approximations of elements of tensor products of Banach spaces.

Дмитришин М.И. *Тензорные произведения абстрактных пространств Бесова* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 241–246.

Доказана интерполяционная теорема для тензорных произведений абстрактных пространств Бесова, ассоциируемых с замкнутыми операторами в банахових пространствах, и показано ее применение к проблеме аппроксимаций элементов тензорных произведений банахових пространств.