Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Копач М.І.[1], Обшта А.Ф.[2], Шувар Б.А.[2]

АНАЛОГИ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ КУРПЕЛЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПІСЛЯДІЄЮ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 268–274.

Досліджені аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією, в яких праві частини мають властивість гетеротонності. Встановлені оцінки збіжності алгоритмів.

Вступ

Диференціальні рівняння з післядією виникають при моделюванні реальних процесів у техніці, медицині, біології, економіці, фізиці, демографії й інших галузях науки і техніки. В таких моделях, що мають протяжність у часі, стан об'єктів характеризується не лише параметрами біжучого моменту часу, а й нерідко залежить від їхнього попереднього стану. Наприклад, в процесах керування соціальними явищами істотний вплив мають ефекти інформаційного запізнення. При поширенні сигналів у каналах обернених зв'язків, що мають скінченну швидкість, яка пов'язана з ітераційністю регуляторів, теж потрібно враховувати запізнення за часом. В другій половині XX століття активізувався інтерес дослідників до диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних та інших класів операторних рівнянь, що містять запізнення. Перші теореми про існування розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та їх поведінку були встановлені В. Файтом [6], А.Д. Мишкісом [5], Норкіном [4] та іншими авторами. Динамічним системам, що описуються рівняннями із запізненням присвячено чимало робіт. В багатьох випадках на рівняння із запізненням аргументу можна поширити методику дослідження звичайних диференціальних рівнянь, в яких невідомі функції залежать тільки від поточного часу. В даній статті методику М.С. Курпеля (див. напр., [1]–[5]) побудови двосторонніх методів, застосовано для побудови двосторонніх наближень до розв'язків диференціальних рівнянь з післядією.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 30B70.

Ключові слова і фрази: двосторонні наближення, диференціальні нерівності, запізнення аргументу, метод кроків.

1 Постановка задачі

Розглянемо рівняння вигляду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{1}$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$ є неперервною при $t \in [t_0, T]$ дійсною функцією, причому $\Delta(t) \geq 0$, $g(t, y, z)$, $h(t, y, z)$ є неперервними при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M) = \{x||x - x_0| \leq M\}$, $(x, y, z, x_0 \in R^1)$ дійсними функціями. Шукатимемо неперервно диференційовний при $t \in [t_0, T]$ розв'язок $x(t)$ рівняння (1), який задовольняє початкову умову

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0 = \{t|t \leq t_0, T \in R^1\}, \tag{2}$$

з неперервною функцією $\varphi(t)$.

2 Обґрунтування алгоритмів

Умовою A назвемо таке припущення: задані неперервні при $t \in [t_0, T]$, $y, z, p, q \in S(x_0, M)$ неспадні щодо y та p, незростаючі щодо z та q невід'ємні функції $a_{1i}(t, y, z, p, q)$, $b_{1i}(t, y, z, p, q), \alpha_{1i}(t, y, z, p, q), \beta_{1i}(t, y, z, p, q), i = 1, 2$, для яких із співвідношень $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $p \leq q$ $y, z, p, q \in S(x_0, M)$ випливають нерівності

$$(a_{11}(t, y, z, p, q) + \alpha_{11}(t, y, z, p, q))(z - y) + (a_{12}(t, y, z, p, q) + \alpha_{12}(t, y, z, p, q))(q - p)$$

$$\leq g(t, z, q) - g(t, y, p),$$

$$(b_{11}(t, y, z, p, q) + \beta_{11}(t, y, z, p, q))(z - y) + (b_{12}(t, y, z, p, q) + \beta_{12}(t, y, z, p, q))(q - p)$$

$$\leq h(t, z, q) - h(t, y, p).$$

Задамо неперервно диференційовні при $t \in [t_0, T]$ функції $u(t), v(t) \in S(x_0, M)$, для яких

$$u(t) \leq \varphi(t) \leq v(t), \quad t \in E_0, \tag{3}$$

$$u(t) \leq v(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{4}$$

$$u'(t) \leq g(t, u(t), u(\tau(t))) - h(y, v(t), v(\tau(t))), \tag{5}$$

$$v'(t) \geq g(t, v(t), v(\tau(t))) - h(t, u(t), u(\tau(t))).$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул:

$$y_0(t) = u(t),\ z_0(t) = v(t), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
y'_{n+1} = a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) \\
+a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(y_{n+1}(\tau(t)) - y_n(\tau(t))) \\
+b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) \\
+b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(z_{n+1}(\tau(t)) - z_n(\tau(t))) \\
+g(t, y_n(t), y_n(\tau(t))) - h(t, z_n(t), z_n(\tau(t))), \\
z'_{n+1} = (a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) \\
\alpha_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))))(z_{n+1}(t) - z_n(t))
\end{gathered} \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
+(a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) \\
+\alpha_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))))(z_{n+1}(\tau(t)) - z_n(\tau(t))) \\
(+b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) \\
+\beta_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) \\
(+b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) \\
+\beta_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))))(y_{n+1}(\tau(t)) - y_n(\tau(t))) \\
+g(t, z_n(t), z_n(\tau(t))) - h(t, y_n(t), y_n(\tau(t))), \\
y_{n+1}(t) = z_{n+1}(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Теорема 1. *Нехай виконана умова A, задані функції $u(t), v(t)$, які задовольняють співвідношення (3)–(5). Тоді для ітераційного процесу (6)–(8) справджуються нерівності*

$$
y_t \leq y_{n+1}(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t), \quad n = 0, 1, \ldots, t \in [t_0, T]. \tag{9}
$$

Доведення. Задля зручності позначимо:

$$
\begin{gathered}
a_{1i}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) = a_{1i}^n(t), \\
\alpha_{1i}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) = \alpha_{1i}^n(t), \\
b_{1i}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) = b_{1i}^n(t), \\
\beta_{1i}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) = \beta_{1i}^n(t).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Із (4)–(7) випливає

$$
\begin{gathered}
y_1'(t) - y_0'(t) \geq a_{11}^{(0)}(t)(y_1(t) - y_0(t)) + a_{12}^{(0)}(t)(y_1(\tau(t)) - y_0(\tau(t))) \\
+b_{11}^{(0)}(t)(z_0(t) - z_1(t)) + b_{12}^{(0)}(t)(z_0(\tau(t)) - z_1(\tau(t))), \\
z_0'(t) - z_1'(t) \geq (a_{11}^{(0)}(t) + \alpha_{11}^{(0)}(t))(z_0(t) - z_1(t)) \\
+(a_{12}^{(0)}(t) + \alpha_{12}^{(0)})(z_0(\tau(t)) - z_1(\tau(t)))(b_{11}^{(0)}(y) + \beta_{11}^{(0)}(t))(y_1(t) - y_0(t)) \\
+(b_{12}^{(0)}(t) + \beta_{12}^{(0)}(t))(y_1(\tau(t)) - y_0(\tau(t))).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Додавши до умов (4)–(7) умову A, отримаємо

$$
z_1' - y_1' \geq (a_{11}^{(0)}(t) + b_{11}^{(0)}(t))(z_1(t) - y_1(t)) + (a_{12}^{(0)}(t) + b_{12}^{(0)}(t))(z_1(\tau(t)) - y_1(\tau(t))). \tag{12}
$$

Застосувавши до нерівностей (11) та (12) теорему про двосторонні диференціальні нерівності із запізненням аргументу [2], отримаємо, що $y_0(t) \leq y_1(t)$, $z_1(t) \leq z_0(t)$ та $y_1(t) \leq z_1(t)$ при $t \in [t_0, T]$. Отже нерівності (9) мають місце при $n = 0$.

Припускаючи, що ці нерівності справджуються для деякого $n = k-1 > 0$, аналогічно як при встановленні нерівностей (11)–(12) для $n = k$ матимемо

$$
\begin{gathered}
y_{k+1}'(t) - y_k'(t) \geq a_{11}^{(k)}(t)(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + a_{12}^k(t)(y_{k+1}(\tau(t)) - y_k(\tau(t))) \\
+b_{11}^{(k)}(t)(z_k(t) - z_{k+1}(t)) + b_{12}^k(t)(z_k(\tau(t)) - z_{k+1}(\tau(t))),
\end{gathered}
$$

$$z'_k(t) - z'_{k+1}(t) \geq (a_{11}^{(k)}(t) + \alpha_{11}^k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) + (a_{12}^k(t) + \alpha_{12}^k(t))(z_k(\tau(t)) - z_{k+1}(\tau(t)))$$

$$+(b_{11}^{(k)}(t) + \beta_{11}^k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + (b_{12}^k(t) - \beta_{12}^k(t)(y_{k+1}(\tau(t)) - y_k(\tau(t)))$$

та

$$z'_{k+1}(t) - y'_{k+1}(t) \geq (a_{11}^{(k)}(t) + b_{11}^k(t))(z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t)) + (a_{11}^{(k)}(t) + b_{12}^k(t))(z_{k+1}(\tau(t)) - y_{k+1}(\tau(t)),$$

що на підставі теореми про двосторонні диференціальні нерівності із запізненням аргументу дозволяє стверджувати про виконання нерівностей $y_{k+1}(t) \geq y_k(t)$, $z_{k+1}(t) \leq z_k(t), y_{k+1}(t) \leq z_k(t)$, при $t \in [t_0, T]$.

Згідно принципу математичної індукції робимо висновок про виконання нерівностей (9) для будь-якого n. Теорема доведена. □

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми* 1 *і система рівнянь*

$$y'(t) = g(t, y(t), y(\tau(t))) - h(t, z(t), z(\tau(t))),$$

$$z'(t) = g(t, z(t), z(\tau(t))) - h(t, y(t), y(\tau(t))) \tag{13}$$

з початковою умовою

$$y(t) = z(t) = \varphi(t) \tag{14}$$

має на $[t_0, T]$ *єдиний в класі неперервно диференційовних функцій розв'язок, то задача* (1)–(2) *має єдиний неперервно диференційовний розв'язок* $x^*(t)$*; для цього розв'язку і послідовностей* $y_n(t)$, $z_n(t)$, *побудованих за допомогою формул* (6)–(8), *мають місце співвідношення*

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq x^*(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t). \tag{15}$$

При цьому послідовності $y_n(t)$, $z_n(t)$ *збігаються на* $[t_0, T]$ *рівномірно до* $x^*(t)$ *монотонно не спадаючи та монотонно не зростаючи відповідно.*

Доведення. Доведення зводиться за суттю до повторення міркувань, використаних для обґрунтування теореми 1 □

Умовою В назвемо припущення про існування таких неперервних невід'ємних функцій $\alpha_{2i}(t, y, z, p, q), \beta_{2i}(t, y, z, p, q), i = 1, 2$, для яких із співвідношень $t \in [t_0, T], y \leq z, p \leq q, y, z, p, q \in S(x_0, M)$ випливають нерівності

$$g(t, z, q) - g(t, y, p) \leq (a_{11}(t, z, y, p, q) + \alpha_{21}(t, z, y, p, q))(z - y)$$

$$+(a_{12}(t, z, y, p, q) + \alpha_{22}(t, z, y, p, q))(q - p),$$

$$h(t, z, q) - h(t, y, p) \leq (b_{11}(t, z, y, p, q) + \beta_{21}(t, z, y, p, q))(z - y)$$

$$+(b_{12}(t, z, y, p, q) + \beta_{22}(t, z, y, p, q))(q - p),$$

де функції $a_{1i}(t, z, y, p, q), b_{1i}(t, z, y, p, q)$, $i = 1, 2$, задовольняють умову А.

Теорема 3. *Нехай виконані умови A та B і задані функції $u(t), v(t)$, які задовольняють співвідношення (3)–(5). Тоді при $t \in [t_0, T]$, $n = 0, 1, \dots$ для послідовностей $y_n(t), z_n(t)$, побудованих за допомогою формул (6)–(8), мають місце оцінки*

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))$$

$$+\varphi_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(\tau(t)) - y_{n+1}(\tau(t))) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)) + \varphi_n^{(1)}(t)(z_n(\tau(t)) - y_n(\tau(t))), \quad (16)$$

де

$$f_n^{(1)}(t) = a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$\varphi_n^{(1)}(t) = \alpha_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + \beta_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$f_n^{(2)}(t) = a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$\varphi_n^{(2)}(t) = \alpha_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + \beta_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))).$$

Доведення. Достовірність оцінок (16) підтверджується за допомогою міркувань, які тільки подробицями відрізняються від міркувань, за допомогою яких встановлені оцінки (9) з теореми 1.

Зазначимо, що у тому випадку, коли до системи (7) можна застосувати відомий у теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу метод кроків, тобто, коли маємо ситуацію, за якої

$$\Delta(t) \ge \Delta_0 > 0,$$

то за припущень, які забезпечують виконання нерівності $z'_n(t) - y'_n(t) \ge 0$, при $t \in [t_0, T]$, $n = 0, 1, \dots$, із (16) можна отримати

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le f_n(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \varphi_n(t)(z_n(t) - y_n(t)), \quad (17)$$

де $f_n(t) = f_n^{(2)}(t) + \varphi_n^{(2)}(t)$, $f_n(t) = f_n^{(1)}(t) + \varphi_n^{(1)}(t)$. Звідси отримаємо оцінку вигляду:

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \le \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)(z_n(s) - y_n(s)) \exp\Big(\int_s^t f_n(\xi) d\xi\Big) ds. \quad (18)$$

З (17) та (18) можна отримати менш точні оцінки, поклавши $f_n(t) \le M_1, \varphi_n(t) \le M_2$.

Якщо ж метод кроків незастосовний, то виникають додаткові труднощі щодо можливості практичного розв'язання системи (7) щодо $y_{n+1}(t), z_{n+1}(t)$. Тому доцільно розглянути алгоритм, при побудові якого використовуються формули (6), (8), але систему рівнянь (7) замінено простішою системою вигляду:

$$y'_{n+1} = a_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) - b_{11}^{(n)}(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + g(t, y_n(t), y_n(\tau(t))) - h(t, z_n(t), z_n(\tau(t))),$$
$$(19)$$
$$z'_{n+1}(t) = (a_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) - (b_{11}^{(n)}(t) + \beta_{11}^{(n)}(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t))$$
$$+g(t, z_n(t), z_n(\tau(t))) - h(t, y_n(t), y_n(\tau(t))),$$

де маємо на увазі позначення (10).

Виконання нерівностей (9) для $n = 0$ випливає із співвідношень

$$y'_1(t) - y'_0(t) \ge a_{11}^{(0)}(t)(y_1(t) - y_0(t)) + b_{11}^{(0)}(t)(z_0(t) - z_1(t)),$$

$$z_0'(t) - z_1'(t) \geq (a_{11}^{(0)}(t) + \alpha_{11}^{(0)}(t))(z_0(t) - z_1(t))$$
$$+(b_{11}^{(0)}(t) + \beta_{11}^{(0)}(t))(y_1(t) - y_0(t)),$$

які отримуємо безпосередньо з (5), (6) та (19) для $n = 0$.

Звідси, як і раніше, за теоремою про диференціальні нерівності із запізненням аргументу, матимемо $y_1(t) \geq y_0(t), z_0(t) \geq z_1(t)$, при $t \in [t_0, T]$. Крім того, при $n = 0$ з (19) випливає

$$z_1'(t) - y_1'(t) \geq (a_{11}^{(0)}(t) + \beta_{11}^{(0)}(t))(z_1(t) - y_1(t)).$$

З теореми про диференціальні нерівності із запізненням аргументу можна зробити висновок, що $z_1(t) \geq y_1(t)$, при $t \in [t_0, T]$. Обґрунтуємо можливість переходу від $n-1$ до n в (9). Матимемо

$$y_{n+1}'(t) - y_n'(t) \geq a_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + b_{11}^{(n)}(t)(z_n(t) - z_{n-1}(t)),$$
$$z_n'(t) - z_{n+1}'(t) \geq (a_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + (b_{11}^{(n)}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)).$$

Звідси можна зробити висновок про обґрунтованість нерівностей

$$y_{n+1}(t) \geq y_n(t), z_{n+1}(t) \leq z_{n-1}(t),$$

при $t \in [t_0, T]$, якщо справджуються нерівності $y_n(t) \geq y_{n-1}(t)$, $z_n(t) \leq z_{n-1}(t)$.

Враховуючи це, одержуємо

$$z_{n+1}' - y_{n+1}' \geq (a_{11}^{n}(t) + b_{11}^{n}(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))$$
$$-(a_{11}^{(n)} + b_{11}^{(n)}(t))(z_n(t) - y_n(t)) - a_{11}^{(n)}(t)(z_n(t) - z_{n+1}(t))$$
$$-\beta_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + (a_{11}^{(n)}(t) + b_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(t) + \beta_{11}^{(n)}(t))(z_n(t) - y_n(t))$$
$$+(a_{12}^{(n)}(t) + b_{12}^{(n)}(t) + \alpha_{12}^{(n)}(t) + \beta_{12}^{(n)}(t))(z_n(\tau(t)) - y_n(\tau(t))).$$

Використовуючи теорему про диференціальні нерівності із запізненням аргументу матимемо, що $z_{n+1}(t) \geq y_{n+1}(t)$. Якщо $z_n(t) \geq y_n(t)$ при $t \in [t_0, T]$, то робимо висновок про виконання нерівностей (9) для алгоритму (6), (8), (19).

За зазначених обставин та додаткового припущення про єдиність розв'язку задачі (13), (14) приходимо до такого самого висновку щодо алгоритму (6), (8), (19), який містить теорема 2 щодо алгоритму (6)–(8). □

Наступна теорема підсумовує отриманий для алгоритму (6), (8), (19) висновок.

Теорема 4. *Нехай справджується умова A, задані неперервно диференційовні при* $t \in [t_0, T]$ *функції* $u(t), v(t)$, *які задовольняють співвідношення* (3)–(5) *і задача* (13), (14) *має єдиний розв'язок в класі неперервно диференційовних на* $[t_0, T]$ *пар функцій. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на* $[t_0, T]$ *розв'язку* $x(t)$ *задачі* (1), (2) *і послідовностей* $y_n(t), z_n(t)$, *утворених за допомогою формул* (6), (8), (19) *мають місце при* $t \in [t_0, T], n = 0, 1, ...$ *співвідношення* (15).

Приєднання до умов теореми 4 умови B призводить до формального вигляду (16). Цей факт спричинює те, що надлінійну збіжність для алгоритму (6), (8), (19) можна отримати в тому випадку, коли справджується строга нерівність у (16) і тому застосовний метод кроків. Система (7) містить запізнення у доданках з індексами $n+1$, тому її не завжди вдається розв'язати щодо $y_{n+1}(t), z_{n+1}(t)$. Це обгрунтовує потребу побудови спрощених аналогів алгоритму (6)–(8), окремі з яких можна знайти в [2].

Література

1. Курпель М.С. *Про деякі модифікації методу Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь* // Доповіді АН УРСР. Серія А. — 1969. — № 4. — С. 303–306.
2. Курпель М.С., Шувар Б. А. Двусторонные операторные неравенства и их применения. — К.: Наукова думка, 1980. — 276 с.
3. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
4. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1965. — 356 с.
5. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. — Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 515 с.
6. W. B. Fite *Properties of the solution of certain functional differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **22**, 3 (1921), 311–318.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

[2] Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна

Надійшло 17.08.2012

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Analogues of bilateral Kurpel's methods for differential equations with aftereffect*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 268–274.

It is studied analogues of bilateral Kurpel's methods for differential equations with aftereffect in which the right parts tend heteroton. Estimates of convergence of the algorithms established.

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги двусторонних методов Курпеля для дифференциальных уравнений с последействием* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 268–274.

Исследованы аналоги двусторонних методов Курпеля для дифференциальных уравнений с последействием, в которых правые части имеют свойство гетеротонности. Установлены оценки сходимости алгоритмов.