Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.948

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНОСТОРОННЬОЮ ЛІПШИЦЄВІСТЮ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Диференціальні нерівності з односторонньою ліпшицєвістю // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 59–64.

Отримано нові результати про диференціальні нерівності за припущень, які є слабшими за умову Ліпшиця.

Численні застосування інтегральних, диференціальних та інших класів операторних нерівностей стимулюють інтерес до їх теорії, започаткованої Пеано в 1885 – 1886 роках (див., напр., [2, с. 60]). Обширну бібліографію щодо цього можна знайти в [4]. Поява нових досліджень про операторні, зокрема інтегральні нерівності (див., напр., [5, 3] та бібліографію в них) спонукає звернутись до запропонованої М. С. Курпелем методики побудови і обгрунтування тверджень про двосторонні операторні нерівності (див., напр., [1]).

В теорамах про строгі диференціальні нерівності, в яких з нерівностей

$$p'(t) < f(t, p(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]), \quad p(t_0) \leqslant x(t_0)$$

випливає нерівність $p(t) < x(t)$ при $t \in (t_0, t_2)$, $(t_2 \in [t_0, t_1])$ з неперервно диференційовними функцією $p(t)$ та розв'язком $x(t)$ рівняння

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

вимагається неперервності $f(t, x)$ по сукупності аргументів, а в теоремах про нестрогі диференціальні нерівності, в яких із співвідношень $u'(t) \leqslant f(t, u(t))$, $u(t_0) \leqslant x(t_0)$ випливає $u(t) \leqslant x(t)$ при $t \geqslant t_0$, нерідко фігурує умова Ліпшиця для $f(t, x)$ щодо x.

Пропонована замітка присвячена диференціальним нерівностям для рівнянь (1) з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

за припущення, що функція $f(t, x)$ задовольняє умову Ліпшиця в неповному об'ємі. Одержані результати можна розглядати як покращення відповідних результатів із [2]

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A40.

у зв'язку з наведеними в [2, с. 40, 49] твердженнями про однозначну розв'язність та оцінку розв'язку скалярного диференціального рівняння (1).

Вважатимемо $f(t,x)$ неперервною при $t \in [t_0,t_1]$, $x \in S(x_0) = \{x||x-x_0| \leqslant M, x, x_0 \in R^1\}$ функцією ($-x < t_0 < t_1 < \infty$, R^1 — множина дійсних чисел).

Умовою A назвемо припущення про існування неперервної і невід'ємної при $t \in [t_0,t_1]$ функції $l_1(t)$, для якої із співвідношень $t \in [t_0,t_1]$, $y,z \in S(x_0)$, $y \leqslant z$ випливає нерівність

$$f(t,z) - f(t,y) =\leqslant l_1(t)(z-y).$$

Теорема 1. *Нехай: 1) виконана умова* A; *2) існує неперервно диференційовний на* $[t_0,t_1]$ *розв'язок* $x(t)$ *задачі (1), (2); 3) задані неперервно диференційовні функції* $u(t)$, $v(t)$, *які при* $t \in [t_0,t_1]$ *задовольняють нерівності*

$$u'(t) \leqslant f(t,u(t)), \quad v'(t) \geqslant f(t,v(t)), \tag{3}$$

при чому

$$u(t_0) \leqslant x(t_0) \leqslant v(t_0). \tag{4}$$

Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0,t_1]$ *розв'язку* $x(t)$ *задачі (1), (2) при* $t \in [t_0,t_1]$ *справджуються оцінки*

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t). \tag{5}$$

Доведення. Припустимо існування множини D таких значень $t \in [t_0,t_1]$, для яких не виконується хоч одне із співвідношень (5). Позначимо $t^* = \inf D$. Очевидно, що $t^* \in [t_0,t_1]$, t^* не належить D, якщо множина D не є порожньою. Нехай $t_2 \in D$ таке, що $u(t_2) > x(t_2)$ або $x(t_2) > v(t_2)$. Приймемо для конкретності, що $u(t_2) > x(t_2)$. Тоді $u(t) > x(t)$ у деякому околі точки t_2, бо $u(t)$ та $x(t)$ — неперервні. Без обмеження загальності і задля спрощення міркувань вважатимемо, що $u(t) > x(t)$ при $t \in [t^*,t_2]$. Скориставшись з (1), (3) та умови A, на $[t^*,t_2]$ будемо мати

$$x'(t) - u'(t) \geqslant f(t,x(t)) - f(t,u(t)) \geqslant -l_1(t)(u(t)-x(t)) = l_1(t)(x(t)-u(t)).$$

Позначивши $w(t) = x(t) - u(t)$, отримаємо

$$w'(t) = l_1(t)w(t) + \delta(t), \quad w'(t^*) = 0, \tag{6}$$

де $\delta(t)$ — деяка невід'ємна неперервна при $t \in [t^*,t_2]$ функція. Оскільки явний розв'язок задачі (6) має вигляд

$$w(t) = \int_{t^*}^{t} \delta(s) e^{\int_s^t l_1(\xi)d\xi} ds,$$

то $w(t) \geqslant 0$ при $t \in [t^*,t_2]$. Отримана суперечність з припущенням доводить справедливість твердження теореми щодо оцінок (5).

З неперервності $f(t,x)$ випливає існування нижнього $y(t)$ і верхнього $z(t)$ розв'язків задачі (1), (2). Тоді

$$z'(t) - y'(t) = f(t,z(t)) - f(t,y(t)) \leqslant l_1(t)(z(t)-y(t)).$$

Позначивши $z(t)-y(t)=\varphi(t)$, матимемо

$$\varphi'(t)=l_1(t)\varphi(t)-\tau(t), \quad \tau(t^*)=0 \tag{7}$$

де $\tau(t)$ — неперервна невід'ємна при $t\in[t_0,t_1]$ функція. З явного вигляду розв'язку

$$\varphi(t)=-\int_{t_0}^{t}\tau(s)e^{\int_s^t l_1(\xi)d\xi}ds$$

задачі (7) робимо висновок, що $\varphi(t)\leqslant 0$. Одержана нерівність суперечить тому, що $z(t)\leqslant y(t)$ для будь-якого $t\in[t_0,t_1]$ і $y(t)\neq z(t)$ бодай для одного значення $t\in[t_0,t_1]$. Тому $z(t)=y(t)$ для будь-якого $t\in[t_0,t_1]$, тобто розв'язок задачі (1), (2) — єдиний. Теорему доведено. □

Зауважимо, що праві і ліві частини нерівностей (3)–(5) взаємно незалежні, тому теорему 1 можна було б подати у вигляді двох окремих теорем.

Назвемо умовою B припущення про існування невід'ємної неперервної при $t\in[t_0,t_1]$ функції $l_2(t)$, для якої із співвідношень $t\in[t_0,t_1]$, $y\leqslant z$, $y,z\in S(x_0)$ випливає нерівність

$$-l_2(t)(z-y)\leqslant f(t,z)-f(t,y).$$

Теорема 2. *Нехай: 1) виконана умова B; 2) при $t\in[t_0,t_1]$ існує неперервно диференційовний розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2); 3) система рівнянь*

$$\begin{aligned} y'(t)&=f(t,z(t))-l_2(t)(z(t)-y(t)),\\ z'(t)&=f(t,y(t))+l_2(t)(z(t)-y(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$y(t_0)=z(t_0)=x_0 \tag{9}$$

має єдиний розв'язок $(y(t),z(t))$ з неперервно диференційовними на $[t_0,t_1]$ компонентами $y(t)$, $z(t)$; 4) задані неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(y)$, для яких

$$\begin{aligned} u'(t)&=f(t,v(t))-l_2(t)(v(t)-u(t)),\\ v'(t)&=f(t,u(t))+l_2(t)(v(t)-u(t)), \quad t\in[t_0,t_1], \end{aligned}$$

$$u(t_0)\leqslant x(t_0)=x_0\leqslant v(t_0). \tag{10}$$

Тоді для єдиного неперервного диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) при $t\in[t_0,t_1]$ справджуються оцінки (5.)

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_n'(t)&=f(t,\psi_n(t))-l_2(t)(\psi_n(t)-\varphi_n(t))+\tfrac{1}{n},\\ \psi_n'(t)&=f(t,\varphi_n(t))+l_2(t)(\psi_n(t)-\varphi_n(t))-\tfrac{1}{n}, \quad (n=n_0,n_0+1,\ldots) \end{aligned} \tag{11}$$

з початковими умовами

$$\varphi_n(t_0)=\psi_n(t_0)=x_0 \quad (n=n_0,n_0+1,\ldots).$$

Якщо $d > 0$, то при $(t, \varphi, \psi) \in D_1 = \{(t, \varphi, \psi) | t \in [t_0, t_1], \quad |\varphi - x_0| \leqslant d, \quad |\psi - x_0| \leqslant d\}$ неперервні функції

$$f(t, \psi(t)) - l_2(t)(\psi(t) - \varphi(t)) + \frac{1}{n}, \quad f(t, \varphi(t)) + l_2(t)(\psi(t) - \varphi(t)) - \frac{1}{n}, \tag{12}$$

як функції від t, обмежені в сукупності. Використовуючи методику Тонеллі (див. [2, с.21, 22, 38]), розглянемо ітераційний процес

$$\varphi_{n,k+1}(t) = \varphi_{n,0}(t), \quad \psi_{n,k+1}(t) = \psi_{n,0}(t) \quad (t \in [t_0 - \frac{1}{k}, t_0]), \tag{13}$$

$$\varphi_{n,k+1}(t) = \varphi_{n,0}(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds - \int_{t_0}^{t} l_2(s)(\psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}) - \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds + \tfrac{t - t_0}{n}$$

$$\psi_{n,k+1}(t) = \psi_{n,0}(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds + \int_{t_0}^{t} l_2(s)(\psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}) - \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds - \tfrac{t - t_0}{n} \tag{14}$$

де $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{k}]$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$, k_0 — яке-небудь натуральне число, для якого $\frac{1}{k_0} < \delta, \quad \delta > 0$. Неперервно диференційовні на $[t_0 - \delta, t_0]$ функції $\varphi_{n,0}(t)$, $\psi_{n,0}(t)$ вважаємо заданими так, щоб

$$\varphi_{n,0}(t_0) = \psi_{n,0}(t_0) = x_0,$$

$$\varphi'_{n,0}(t_0) = f(t_0, \psi_{n,0}(t_0)) - l_2(t_0)(\psi_{n,k}(t_0) - \varphi_{n,k}(t_0)),$$
$$\psi'_{n,0}(t_0) = f(t_0, \varphi_{n,0}(t_0)) + l_2(t_0)(\psi_{n,k}(t_0) - \varphi_{n,k}(t_0)),$$

$$|\varphi_{n,0}(t) - x_0| \leqslant d, \quad |\psi_{n,0}(t) - x_0| \leqslant d, \quad |\varphi'_{n,0}(t)| \leqslant M, \quad |\psi'_{n,0}(t)| \leqslant M \quad (t \in [t_0 - \delta, t_0]).$$

Функції $\varphi_{n,k+1}(t)$, $\psi_{n,k+1}(t)$ за допомогою відомого в теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу методу кроків можна продовжити на сегмент $[t_0, t_0 + \alpha]$, де

$$\alpha = \min\left\{t_1 - t_0, \frac{d}{M}\right\}.$$

Послідовності $\{\varphi_{n,k}(t)\}$, $\{\psi_{n,k}(t)\}$ для кожного фіксованого n рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні. З них можна виділити збіжні підпослідовності, кожна з яких збігається рівномірно на $[t_0, t_0 + \alpha]$ до $\varphi_n(t)$ та $\psi_n(t)$ відповідно. При цьому $(\varphi_n(t), \psi_n(t))$ — розв'язок задачі (13), (14). Оскільки функції (12) обмежені в сукупності, наприклад, константою M_1, то $|\varphi'_n(t)| \leqslant M_1$, $|\psi'_n(t)| \leqslant M_1$. Отже, на $[t_0, t_0 + \alpha]$ послідовності $\{\varphi_n(t)\}$ та $\{\psi_n(t)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні. Лема Арцела дає підставу виділити з них підпослідовності, які на $[t_0, t_0 + \alpha]$ збігаються рівномірно до границь $y(t)$ та $z(t)$ відповідно. Праві частини рівностей (11) збігаються відповідно до

$$f(t, z(t)) - l_2(t)(z(t) - y(t)), \quad f(t, y(t)) + l_2(t)(z(t) - y(t)).$$

Тому $(y(t), z(t))$ є розв'язком задачі (8), (9) (див., напр., [2]). Умови 2) та 3) теореми дозволяють вважати, що можна виділити підпослідовності $\{\varphi_{n_m}(t)\}$, $\{\psi_{n_m}(t)\}$ послідовностей $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$ відповідно, які збігаються рівномірно на $[t_0, t_0 + \alpha]$ до єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, t_0 + \alpha]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2).

Перейдемо до доведення нерівностей

$$u(t) < \varphi_n(t), \quad v(t) > \psi_n(t) \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots) \tag{15}$$

на напівінтервалі $(t_0, t_0+\alpha]$. Очевидно, що $u'(t_0) < \varphi_n'(t_0)$, $v'(t_0) > \psi_n'(t_0)$. Тому знайдеться $t \in (t_0, t_0+\alpha]$ таке, що при $t \in (t_0, t_2)$ виконуються нерівності (15). Припускаючи, що ці нерівності справджуються не на всьому $(t_0, t_1]$, допустимо існування такого $t_3 \in (t_1, t_0+\alpha)$, що при $t \in (t_0, t_3)$ виконуються нерівності (15), а при $t = t_3$ будемо мати

$$u(t_3) \leqslant \varphi_n(t_3), \quad v(t_3) \geqslant \psi_n(t_3) \tag{16}$$

і при цьому бодай одне із співвідношень (16) є рівністю. Нехай для визначеності $u(t_3) = \varphi_n(t_3)$. Тоді з умови B отримуємо

$$\varphi_n'(t_3) = f(t_3, \psi_n(t_3)) - l_2(t_3)(\psi_n(t_3) - \varphi_n(t_3)) + \frac{1}{n} \geqslant$$

$$f(t_3, v(t_3)) - l_2(t_3)(v(t_3) - u(t_3)) + \frac{1}{n} \geqslant u'(t_3) + \frac{1}{n} > u'(t_3). \tag{17}$$

Оскільки

$$\varphi_n'(t_3) = \lim_{\triangle t \to 0^-} \frac{\varphi_n(t_3 + \triangle t) - \varphi_n(t_3)}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0^-} \frac{u(t_3 + \triangle t) - u(t_3)}{\triangle t} = u'(t_3),$$

то одержана суперечність із строгою нерівністю (17) доводить, що на $(t_0, t_0+\alpha)$ нерівності (15) виконуються. За допомогою граничного переходу приходимо до співвідношень (10) для $t \in (t_0, t_0+\alpha)$.

Залишається довести можливість продовження оцінок (10) на $[t_0, t_1]$. Припускаючи протилежне, вважатимемо, що $t_0 + \alpha < t_1$ і що знайдеться $t' \in (t_0+\alpha, t_1]$ таке, що при $t = t'$ хибне принаймні одне із співвідношень (10). Нехай t^* — точна нижня грань таких t', для яких на деякому інтервалі (t^*, t_4) $(t_4 \leqslant t_1)$ якесь одне із співвідношень (або обидва) є хибним. Побудуємо послідовності функцій $\{\overline{\varphi}_n(t)\}$, $\{\overline{\psi}_n(t)\}$, визначаючи $(\overline{\varphi}_n(t), \overline{\psi}_n(t))$ як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi'}_n(t) = f(t, \overline{\psi}_n(t)) - l_2(t)(\overline{\psi}_n(t) - \overline{\varphi}_n(t)) + \tfrac{1}{n}, \\ &\overline{\psi'}_n(t) = f(t, \overline{\varphi}_n(t)) + l_2(t)(\overline{\psi}_n(t) - \overline{\varphi}_n(t)) - \tfrac{1}{n} \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots) \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$\overline{\varphi}_n(t^*) = \overline{\psi}_n(t^*) = x(t^*).$$

Міркуючи так само, як при розгляді ситуації для $[t_0, t_0+\alpha]$, приходимо до висновку про існування сегменту $[t^*, t^*+\alpha_1] \subseteq [t^*, t_1]$, на якому справджуються оцінки (10). Це суперечить припущенню про неможливість продовження співвідношень (10) правіше за t^* і означає, що теорему доведено повністю. $\square$

Теореми 1 та 2 є новими, якщо $l_1(t) \neq 0$ та $l_2(t) \neq 0$. При $l_1(t) = 0$ та $l_2(t) = 0$ отримуються відповідні результати із [4] (див. також [2, с. 40, 49]).

Література

1. Курпель Н. С., Шувар Б. В. *Двусторонние операторные неравенства и их применение.* — Киев: Наук. думка. — 1980. — 267 с.

2. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Мир. — 1973. — 720 с.

3. Matarazzo G., Pecoraro M., Tucci D., *About new Bihari's lemma for discontinuous functions* // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. — Київ: 2008. — С. 722–724.

4. Rabczuk R., *Elementy nierówności różniczkowych*, Warszwa: PWN, 1976, 276 s.

5. Verygina I., Piccirillo A. M., Angela Gallo, *About some generalization Bihari result for integro-sum inequalities for discontinuous functions of n-independent variables* // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. — Київ: 2008. — С. 540–542.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.02.2009

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Differential inequalities with one-sided Lipshitz property*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 59–64.

New results on differential inequalities under assumptions, which are weaker than the Lipshitz conditions, are obtained.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Дифференциальные неравенства с односторонней липшициевостью // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 59–64.

Получено новые результаты о дифференциальных неравенствах, которые являются более слабыми, чем условие Липшица.