Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.956

Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В.

ЗАДАЧА ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В СЕКТОРІ

Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В. *Задача для виродженої напівлінійної гіперболічної системи в секторі* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 4–12.

Розглянуто крайову задачу для напівлінійної гіперболічної системи в секторі, причому частина рівнянь системи має горизонтальні характеристики. За допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень встановлено умови існування та єдиності глобального узагальненого неперервного розв'язку задачі.

Вступ

Дослідженню початково-крайових задач для лінійних одновимірних гіперболічних рівнянь і систем присвячено багато літеретурних джерел, де використано різноманітні методи досліджень (методи спеціальних розвинень, інтегральних перетворень, наближені методи тощо). Складнішими для досліджень є нелінійні задачі, зокрема задачі для напівлінійних та квазілінійних систем, чи задачі з нелінійними крайовими умовами, для яких характерною є проблема неіснування неперервного розв'язку для "великих" t [3]. Зазначимо також, що традиційно розглядаються гіперболічні системи, яким відповідають характеристики, що є функціями часу, проте важчим для вивчення є випадок, коли характеристичні лінії є ортогональними часовій осі.

У роботі досліджена некласична задача для одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Некласичність задачі полягає в наявності регулярної та сингулярної (що містить характеристики ортогональні осі часу) частин системи. Областю визначення розв'язку є сектор, тому відрізок задання початкових умов вироджується в точку, і в постановці задачі ці умови відсутні. Крім цього праві частини рівнянь системи та крайових умов є нелінійними функціями.

Такі задачі моделюють багато проблем газо- та гідродинаміки (задача про поршень) [3], [6, 7]. До розгляду подібних областей приходимо при вивченні початково-крайових

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35L50.
Ключові слова і фрази: гіперболічна система, метод стискуючих відображень, метод характеристик, напівлінійні рівняння.

задач для гіперболічних систем з розривними коефіцієнтами, якщо лінії розриву вихідних даних мають спільні точки [2, 5].

У роботі встановлено умови глобальної узагальненої розв'язності задачі. В ході доведення теореми відшукання розв'язку задачі зводиться до знаходження нерухомої точки оператора в просторі зі спеціальною ваговою метрикою, при цьому правильний підбір ваг забезпечує стисну властивість оператора [1, 4].

1 Постановка задачі

В області $V = \{(x,t) : 0 < t < T,\ -kt < x < kt,\ k > 0\}$ розглядаємо вироджену напівлінійну гіперболічну систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u,v), \end{cases} \tag{1}$$

де $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, $\Lambda(x,t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x,t), \dots, \lambda_m(x,t))$. Доповнимо систему (1) крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_i(-kt,t) &= \gamma_i^1\Big(t, \big(u_s(-kt,t)\big)_{s\in I_1}\Big), \quad i \in I_2 \cup I_3, \\ u_i(kt,t) &= \gamma_i^2\Big(t, \big(u_s(kt,t)\big)_{s\in\ I_2}\Big), \quad i \in I_1 \cup I_3, \end{aligned} \tag{2}$$

$$v_j(-kt,t) = \psi_j\Big(t, \big(u_s(-kt,t)\big)_{s\in I_1}\Big), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{3}$$

де I_1, I_2, I_3 – множини індексів, що визначаються наступним чином:

$$I_1 = \Big\{i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i(0,0) < -k\Big\}, \qquad I_2 = \Big\{i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i(0,0) > k\Big\},$$
$$I_3 = \Big\{i \in \{1, \dots, m\} : -k < \lambda_i(0,0) < k\Big\}.$$

Нехай множини I_1, I_2, I_3 містять відповідно r_1, r_2, r_3 елементів. Будемо вважати, що всі задані функції $f : \overline{V} \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, $g : \overline{V} \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $\Lambda : \overline{V} \to \mathbb{R}^m$, $\gamma^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_1} \to \mathbb{R}^{r_2+r_3}$, $\gamma^2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_2} \to \mathbb{R}^{r_1+r_3}$, $\psi : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_1} \to \mathbb{R}^n$ є неперервними, а функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною x.

2 Узагальнений розв'язок задачі

Позначимо через $\varphi_i(\tau; x, t), i \in \{1, \dots, m\}$ непродовжувальний розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Тоді отримаємо m сімей характеристичних кривих системи (1). Зауважимо, що ця система має також сім'ю горизонтальних характеристик вигляду $t = t_0$. Нехай $\chi_i(x_0, t_0)$ є найменшим значенням аргументу t, при якому визначений розв'язок $\varphi_i(t; x_0, t_0)$.

З допомогою інтегрування зведемо систему (1) до системи інтегральних рівнянь:

$$u_i(x,t) = u_i\Big(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t), \chi_i(x,t)\Big)$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big) d\tau, \quad i \in \{1,\dots,m\}, \tag{4}$$

$$v_j(x,t) = v_j(-kt,t) + \int\limits_{-kt}^{x} g_j\Big(y,t,u(y,t),v(y,t)\Big) dy, \quad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{5}$$

Означення. *Узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)–(3) будемо називати двійку вектор-функцій (u, v), компоненти яких належать простору $C(\overline{V})$, причому задовольняються інтегральні системи (4), (5) та крайові умови (2), (3).*

3 Основна теорема

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *λ, f, g, γ^1, γ^2, ψ є неперервними вектор-функціями на відповідних множинах;*

2) *компоненти вектор-функції λ є ліпшицевими на множині $\overline{V}$ за змінною x;*

3) *компоненти вектор-функцій λ, f, g, γ^1, γ^2, ψ є ліпшицевими за змінними u, v на відповідних множинах, причому сталі Ліпшиця вектор-функцій γ^1, γ^2 є меншими одиниці;*

4) *правильне співвідношення*

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(kt,t)-k) \neq 0, \quad t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,m\};$$

5) *система $r_1 + r_2$ рівнянь відносно $r_1 + r_2$ невідомих*

$$\begin{cases} \alpha_i = \gamma_i^1(0, (\alpha_s)_{s\in I_1}), & i \in I_2, \\ \alpha_i = \gamma_i^2(0, (\alpha_s)_{s\in I_2}), & i \in I_1, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $\alpha_i = \alpha_i^0,\ i \in I_1 \cup I_2$;

6) *має місце умова погодження*

$$\gamma_i^1(0, (\alpha_s)_{s\in I_1}) = \gamma_i^2(0, (\alpha_s)_{s\in I_2}), \quad i \in I_3.$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (1)–(3) .

Доведення. Розглянемо простір $\mathcal{Q}$, елементами якого є двійки вектор-функцій $w = (u,v)$ з компонентами із простору $\mathrm{C}(\overline{V})$, причому $u_i(0,0) = \alpha_i^0,\ i \in I_1 \cup I_2$. Визначимо метрику наступним чином

$$\rho(w^1,w^2) = \max\Big\{\max_{i,x,t}|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|\,\alpha_i(x,t)e^{-at};\ \max_{i,x,t}|v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)|\,\beta_i(x,t)e^{-at}\Big\},$$

де додатну сталу a і неперервні додатні функції $\alpha_i,\ \beta_i$ підберемо пізніше. Зауважимо, що отриманий метричний простір є повним.

На елементах простору $\mathcal{Q}$ визначимо оператор $F = (F_1,\ldots,F_m)$ за формулою

$$F_i[w](x,t) = \begin{cases} \gamma_i^1\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_1}\Big), \\ \qquad \text{якщо } \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = -k\chi_i(x,t), \\ \gamma_i^2\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_2}\Big), \\ \qquad \text{якщо } \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = k\chi_i(x,t), \end{cases}$$

тоді рівність

$$u_i(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t)) = F_i[w](x,t), \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \quad (x,t) \in \overline{V}$$

еквівалентна крайовим умовам (2).

Таким чином, узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) є розв'язком системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = F_i[w](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big)d\tau, \qquad i \in \{1,\ldots,m\},$$

$$v_j(x,t) = \psi_j\Big(t,\big(u_s(-kt,t)\big)_{s\in I_1}\Big) + \int\limits_{-kt}^{x} q_j\Big(y,t,u(y,t),v(y,t)\Big)dy, \quad j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Враховуючи отримані співвідношення, на елементах простору $\mathcal{Q}$ введемо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1^1,\ldots,\mathcal{A}_m^1,\mathcal{A}_1^2,\ldots,\mathcal{A}_n^2)$, де

$$\mathcal{A}_i^1[w](x,t) = F_i[w](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big)d\tau, \qquad i \in \{1,\ldots,m\},$$

$$\mathcal{A}_i^2[w](x,t) = \psi_j\Big(t,\big(u_s(-kt,t)\big)_{s\in I_1}\Big) + \int\limits_{-kt}^{x} q_j\Big(y,t,u(y,t),v(y,t)\Big)dy, \quad j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Отже, відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в $\mathcal{Q}$, тобто елемента $w^* \in \mathcal{Q}$, такого що $\mathcal{A}[w^*] = w^*$.

Існування та єдиність нерухомої точки оператора встановимо на основі теореми Банаха про стискуюче відображення. Зауважимо, що $\mathcal{A}[w] \in \mathcal{Q}$, якщо $w \in \mathcal{Q}$, що випливає з відомих теорем математичного аналізу, а також із неперервності функцій φ_i за всіма компонентами, причому враховуються припущення 4), 5), 6) теореми.

Введемо позначення. Нехай L є спільною сталою в умовах Ліпшиця для функцій f, q, ψ, що записана у вигляді

$$|f_i(x,t,u^1,v^1) - f_i(x,t,u^2,v^2)| \le L \max\left\{ \max_j |u_j^1 - u_j^2|,\ \max_j |v_j^1 - v_j^2| \right\},$$

і аналогічно для інших функцій, а через H позначимо спільну сталу Ліпшиця для функцій γ^1, γ^2, причому згідно припущення 3) теореми $H < 1$.

Зазначимо, що з означення метрики для всіх допустимих i, x, t, та $w \in \mathcal{Q}$ випливає співвідношення

$$|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \le \frac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_i(x,t)} e^{at}, \quad |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| \le \frac{\rho(w^1,w^2)}{\beta_i(x,t)} e^{at}.$$

Встановимо коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}$, для чого отримаємо ряд оцінок. Нехай $w^1 \in \mathcal{Q}$, $w^2 \in \mathcal{Q}$, тоді справедливе співвідношення

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \le \begin{cases} H \max\limits_{j \in I_1,\, \tau} \dfrac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(-k\tau,\tau)} e^{a\chi_i(x,t)}, \\ \text{якщо } \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = -k\chi_i(x,t), \\ H \max\limits_{j \in I_2\, \tau} \dfrac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(k\tau,\tau)} e^{a\chi_i(x,t)}, \\ \text{якщо } \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = k\chi_i(x,t). \end{cases} \tag{6}$$

Якщо має місце перша альтернатива оцінки (6), то виконується рівність

$$x + \int\limits_t^{\chi_i(x,t)} \lambda_i(\varphi(\tau;x,t),\tau)d\tau = -k\chi_i(x,t),$$

з якої виводимо нерівність $\chi_i(x,t) \le \dfrac{-x + \Lambda t}{\Lambda + k}$, де $\Lambda = \max\limits_{i,x,t} |\lambda_i(x,t)|$. Аналогічно за другої альтернативи отримуємо нерівність $\chi_i(x,t) \le \dfrac{x + \Lambda t}{\Lambda + k}$.

На основі отриманих співвідношень виводимо оцінку для оператора $\mathcal{A}^1$

$$\left|(\mathcal{A}_i^1[w^1])(x,t) - (\mathcal{A}_i^1[w^2])(x,t)\right| \alpha_i(x,t) e^{-at}$$
$$\le H \max\left\{ \max_{\substack{i \in I_2 \cup I_3, \\ j \in I_1,\, \tau}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\left(\frac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k} - t\right)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)}, \max_{\substack{i \in I_1 \cup I_3, \\ j \in I_2,\, \tau}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\left(\frac{x+\Lambda t}{\Lambda+k} - t\right)}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} \right\} \rho(w^1,w^2)$$
$$+ \int\limits_0^t e^{a(\sigma - t)} d\sigma L \max\left\{ \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)}, \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)} \right\} \rho(w^1,w^2)$$

$$\leq H \max\left\{ \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)}, \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} \right\}\rho(w^1,w^2)$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)}, \max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2),$$

а також оцінку для оператора $\mathcal{A}^2$

$$\left|\mathcal{A}_i^2[w^1](x,t)-\mathcal{A}_i^2[w^2](x,t)\right|\beta_i(x,t)e^{-at} \leq \Bigg(L\max_{i,\,j\in I_1}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}$$

$$+\int\limits_{-kt}^{x} L\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\Bigg)\rho(w^1,w^2).$$

Використавши отримані оцінки встановлюємо

$$\rho(A[w^1],A[w^2]) \leq \max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\Bigg\{ H\max\left\{ \max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)}, \max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} \right\}$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)}, \max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\} + L\max_{i,\,j\in I_1}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}$$

$$+\int\limits_{-kt}^{x} L\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\Bigg\}\rho(w^1,w^2).$$

Підберемо функції α_i, β_i, так щоб коефіцієнт стиску оператора був меншим одиниці. Нехай

$$\alpha_i(x,t)=\begin{cases} e^{p(kt-x)}, & i\in I_1,\\ e^{p(kt+x)}, & i\in I_2,\\ e^{p(kt-x)(kt+x)}, & i\in I_3, \end{cases}\ ,\quad \beta_i(x,t)=\varepsilon e^{-p(kt+x)},\ i\in\{1,\dots,n\},$$

де p, ε є деякими додатними параметрами.

Нехай виконуються припущення

$$p(\Lambda+k)\leq a,\quad 2pkT(\Lambda+k)\leq a,$$

тоді правильні оцінки

$$\max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max_{\substack{i\in I_2\cup I_3,\\ j\in I_1,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)} = \max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max_{i\in I_2\cup I_3}\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}$$

$$=\max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max\{e^{p(kt+x)},\ e^{p(kt-x)(kt+x)}\}e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}=1,$$

$$\max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max_{\substack{i\in I_1\cup I_3,\\ j\in I_2,\,\tau}} \frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(k\tau,\tau)} = \max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max_{i\in I_1\cup I_3}\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}$$

$$=\max_{(x,\,t)\in\overline{V}}\max\{e^{p(kt-x)},\ e^{p(kt-x)(kt+x)}\}e^{a\frac{x-kt}{\Lambda+k}}=1.$$

Також мають місце співвідношення

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \max_{i,j\in I_1} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{2pkt}} = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \varepsilon e^{-3pkt-px} = \max_t \varepsilon e^{-2pkt} = \varepsilon,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \int\limits_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)} dy \le \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int\limits_{-kt}^{x} \varepsilon e^{-p(kt+x)} dy = \max_{x,t} \left\{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt) \right\} \le \varepsilon 2kT,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}} \int\limits_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)} dy = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int\limits_{-kt}^{x} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{\varepsilon e^{-p(kt+y)}} dy$$
$$= \max_{(x,t)\in\overline{V}} \int\limits_{-kt}^{x} e^{p(y-x)} dy = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \frac{1-e^{-p(kt+x)}}{p} \le \frac{1}{p}.$$

У підсумку одержимо нерівність

$$\rho(\mathcal{A}[w^1], \mathcal{A}[w^2]) \le \left(H + \frac{L}{a} \max_{(x,t)\in\overline{V}} \left\{ \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)}, \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)} \right\} \right.$$
$$\left. + L\varepsilon + L\left(\varepsilon 2kT + \frac{1}{p} \right) \right) \rho(w^1, w^2).$$

Нехай p^*, ε^* додатні значення, що задовольняють умову

$$L\varepsilon^* + L\left(\varepsilon^* 2kT + \frac{1}{p^*} \right) < \frac{1-H}{2},$$

а функції α_i^*, β_i^* є рівними відповідно функціям α_i, β_i при $p = p^*$, $\varepsilon = \varepsilon^*$. Позначимо

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{V}} \left\{ \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(y,\tau)} \max_{i,j,y,\tau} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(y,\tau)} \right\}.$$

Насамкінець фіксуємо значення a^*, щоб задовольнити умови

$$p^*(\Lambda + k) \le a^*, \quad 2p^*kT(\Lambda + k) \le a^*, \quad \frac{LM}{a^*} < \frac{1-H}{2}.$$

Тоді оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{Q}^*$, що рівний простору $\mathcal{Q}$ з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i^*$, $\beta_i = \beta_i^*$ та параметром $a = a^*$.

Таким чином, на основі теореми Банаха про стискуюче відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}^*$. Ця нерухома точка є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). □

4 Наслідки з теореми

Розглядаємо систему (1) в області $\hat{V} = \{(x,t) : 0 < t < T,\ k_1 t < x < k_2 t,\ k_1 < k_2\}$, доповнивши її крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_i(k_1 t, t) &= \gamma_i^1\Big(t, \big(u_s(k_1 t, t)\big)_{s\in I_1}\Big), \quad i \in I_2 \cup I_3,\\ u_i(k_2 t, t) &= \gamma_i^2\Big(t, \big(u_s(k_2 t, t)\big)_{s\in\ I_2}\Big), \quad i \in I_1 \cup I_3, \end{aligned} \tag{7}$$

$$v_j(k_1 t, t) = \psi_j\Big(t, \big(u_s(k_1 t, t)\big)_{s\in I_1}\Big), \quad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{8}$$

де множини індексів I_1, I_2, I_3 визначаються наступним чином:

$$I_1 = \Big\{i \in \{1,\dots,m\} : \lambda_i(0,0) < k_1\Big\}, \qquad I_2 = \Big\{i \in \{1,\dots,m\} : \lambda_i(0,0) > k_2\Big\},$$
$$I_3 = \Big\{i \in \{1,\dots,m\} : k_1 < \lambda_i(0,0) < k_2\Big\}.$$

Наслідок 4.1. *Нехай виконуються припущення 1)–3) та 5), 6) теореми, а також*

4) правильне співвідношення*

$$(\lambda_i(k_1 t, t) - k_1)(\lambda_i(k_2 t, t) - k_2) \neq 0, \quad t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,m\}.$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (1), (7), (8).

Доведення. Оскільки наступна заміна незалежних змінних $(x,t) \rightsquigarrow (y,t)$, де $y = -kt + \dfrac{2k}{k_2 - k_1}(x - k_1 t)$ зводить задачу (1), (7), (8) в області $\hat{V}$ до задачі (1)–(3) в області V, то наслідок 4.1 безпосередньо випливає з твердження теореми. □

Наслідок 4.2. *Крайові умови (3) в постановці задачі можна замінити умовами*

$$v_j(-kt, t) = \psi_j(t, u(-kt, t)), \quad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{9}$$

причому твердження теореми залишиться правильним стосовно задачі (1), (2), (9).

Доведення. Для доведення наслідку достатньо зауважити, що

$$\begin{aligned} \psi_j(t, u(-kt,t)) &= \psi_j\Big(t, (u_s(-kt,t))_{s\in I_1}, \big(\gamma_i^1\big(t, (u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\big)\big)_{i\in I_2\cup I_3}\Big)\\ &= \psi_j^1\Big(t, (u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\Big), \quad j \in \{1,\dots,n\}. \end{aligned}$$

□

Наслідок 4.3. *Якщо виконується рівність $r_1 + r_2 = 0$, то умови (2) матимуть вигляд*

$$\begin{aligned} u_i(-kt, t) &= \gamma_i^1(t), \quad i \in I_3,\\ u_i(kt, t) &= \gamma_i^2(t), \quad i \in I_3. \end{aligned}$$

В цьому випадку припущення 5) теореми є зайвим, а припущення 6) набуде вигляду

$$\gamma_i^1(0) = \gamma_i^2(0), \quad i \in I_3.$$

Література

1. Кирилич В. М., Филимонов А. М. *Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений* // Матем. студії. — 2008. — Т.30, №1. — С. 42–60.
2. Кузнецов Н. Н. *О гиперболических системах линейных уравнений с разрывными коэффициентами* // Дифф. уравнения. – ЖВМ и МФ. — 1963. — Т.3, №2. — С. 299–313.
3. Марсден Дж. Е., Чорин А. Математические основы механики жидкости. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. — 204 с.
4. Мауленов О., Мышкис А. Д. *О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — №5. — С. 25–29.
5. Мельник З. О., Мышкис А. Д. *Смешанная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами* // Матем. сбор. — 1965. — Т.68, №4. – С. 632–638.
6. Сидоренко А. Д. *Задачи с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений* // Дифф. уравнения. — 1978. — Т.14, №3. — С. 505–511.
7. Lee Da-tsin, Wen-tsu Y. *Boundary value problems for the first order quasilinear hyperbolic systems and their applications*, J. Differ. Equat, **41**, 1 (1981), 1–26.

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

e-mail: *olpelushkevych@ukr.net*

Надійшло 10.06.2011

Andrusyak R.V., Kyrylych V.M., Peliushkevych O.V. *A problem for degenerated semilinear hyperbolic system in sector*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 4–12.

A boundary problem for the semilinear hyperbolic system in a sector is considered. Some equations of the system have horizontal characteristics. Applying the method of characteristics and princeple of contractive mappings the conditions for global generalized solvability of the problem are established.

Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В. *Задача для вырожденной полулинейной гиперболической системы в секторе* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 4–12.

Рассмотрена краевая задача для полулинейной гиперболической системы в секторе, причем часть уравнений системы имеет горизонтальные характеристики. С помощью метода характеристик и принципа сжимающих отображений установлены условия существования и единственности глобального обобщенного непрерывного решения задачи.