Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 515.12+512.58

Довбняк Т.С.

ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАФУНКЦІЙ ТРИКУТНИХ $(0,1)$-МАТРИЦЬ ДО ВІДШУКАННЯ ЧИСЛА КОМПОНЕНТ ЗВ'ЯЗНОСТІ ГРАФІВ

Довбняк Т.С. *Застосування парафункцій трикутних* $(0,1)$*-матриць до відшукання числа компонент зв'язності графів* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 57–63.

Розглядаються застосування парафункцій трикутних матриць до відшукання числа компонент зв'язності графів.

Розглянемо множину неорієнтованих графів $G\{V,R\}$, де $|V|=n$ — кількість вершин графа [5].

Вершини графа можна довільним чином пронумерувати від 1 до n і кожному такому графу поставити у відповідність трикутну матрицю суміжності $A=[a_{i,j}]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$, у якій

$$a_{i,j}=\begin{cases} 1, & \text{якщо } (i,j)\in R, \\ 0, & \text{якщо } (i,j)\notin R. \end{cases} \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Це буде трикутна $(0,1)$-матриця n-го порядку [3], всі елементи діагоналі якої дорівнюють одиниці [2].

Означення 1. *Для трикутної матриці A матрицю $(A-\lambda E)$, де E одинична матриця, а λ — деякий параметр, назвемо характеристичною матрицею, тобто $A-\lambda E=(b_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$, де $b_{i,i}=1-\lambda$, $b_{i,j}=a_{i,j}$, $i,j=1,2,\ldots,n$.*

Характеристичній матриці $(A-\lambda E)$ поставимо у відповідність два *характеристичні поліноми*

$$\varphi(\lambda)=ddet(A-\lambda E),$$

$$\psi(\lambda)=pper(A-\lambda E)$$

Означення 2. *Значення параметра λ, при якому поліноми $\varphi(\lambda)$ та $\psi(\lambda)$ приймають значення 0, називається власними значеннями трикутної матриці.*

Твердження 1. *Якщо λ_0 — власне значення полінома $\varphi(\lambda)$, то $2-\lambda_0$ є власним значенням полінома $\psi(\lambda)$ і навпаки.*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: парадетермінант, параперманент, неорієнтовані графи.

Доведення. Використовуючи теорему про зв'язок парадетермінанта із параперманентом, характеристичні поліноми $\varphi(\lambda)$ та $\psi(\lambda)$ можна записати відповідно у такому вигляді:

$$\varphi(\lambda) = U_1(1-\lambda) + U_2(1-\lambda)^2 + \ldots + U_n(1-\lambda)^n,$$

$$\psi(\lambda) = (-1)^{n-1}U_1(1-\lambda) + (-1)^{n-2}U_2(1-\lambda)^2 + \ldots + U_n(1-\lambda)^n,$$

де $U_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Зробивши у останніх рівняннях відповідно заміни $t = 1 - \lambda$ і $k = \lambda - 1$, одержимо відповідно рівняння:

$$U_1 t + U_2 t^2 + \ldots + U_n t^n = 0, \tag{1}$$

$$(-1)^{n-1}U_1 k + (-1)^{n-2}U_2 k^2 + \ldots + U_n k^n = 0. \tag{2}$$

які, очевидно, співпадають. Отже, згідно із зробленими підстановками, якщо λ_0 власне значення полінома $\varphi(\lambda)$, то $2 - \lambda_0$ — власне значення полінома $\psi(\lambda)$ і навпаки. $\square$

Наслідок 1. *Кратності коренів характеристичних рівнянь $ddet(A - \lambda E) = 0$ і $pper(A - \lambda E) = 0$ співпадають.*

Для довільного графа G можна знайти його транзитивне замикання — G^T. Операція транзитивного замикання не змінює кількість компонент графа [4]. Для утвореного графа G^T побудуємо канонічну матрицю A.

Канонічна матриця A є блоково-діагональною [2] і матиме такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{t_1} & & & \\ 0 & A_{t_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{t_k} \end{pmatrix}_n ,$$

де

$$A_{t_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{t_i} ,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$ для графа G^T, який складається k компонент.

Для трикутної матриці A канонічного вигляду транзитивно замкненого графа G^T можна обчислити характеристичні поліноми $\varphi(\lambda)$, $\psi(\sigma)$. Це будуть многочлени степеня $deg(\varphi(\lambda)) = deg(\psi(\sigma)) = n$, де n – порядок матриці A та кількість вершин графа G^T.

Розглянемо два графи G_1^T та G_2^T, які є транзитивними замиканнями відповідно графів G_1 та G_2 [1]. Кожному графу G_i $(i = 1, 2)$ відповідає канонічна матриця A_i та два характеристичні многочлени $\varphi_i(\lambda)$ та $\psi_i(\sigma)$. Для них виконується наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо число компонент графів G_1^T та G_2^T співпадає, то їхні характеристичні многочлени співпадають:*

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda), \tag{3}$$

$$\psi_1(\sigma) = \psi_2(\sigma). \tag{4}$$

Доведення. Нехай матриці A_1 і A_2 мають такий вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{t_1} & & & \\ 0 & A_{t_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{t_k} \end{pmatrix}_n,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_{p_1} & & & \\ 0 & A_{p_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{p_k} \end{pmatrix}_n,$$

де

$$A_{t_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{t_i}, A_{p_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{p_i}, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Причому

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} p_i = n.$$

Позаяк матриці A_1 і A_2 є блоково-діагональними, то їхні парафункції можна записати у вигляді [2]:

$$pperA_1 = pperA_{t_1} \cdot \ldots \cdot pperA_{t_k},$$

$$ddetA_1 = ddetA_{t_1} \cdot \ldots \cdot ddetA_{t_k},$$

$$pperA_2 = pperA_{p_1} \cdot \ldots \cdot pperA_{p_k},$$

$$ddetA_2 = ddetA_{p_1} \cdot \ldots \cdot ddetA_{p_k}.$$

Отже, для характеристичних поліномів матриці A_1 матимемо рівності

$$\varphi_1(\lambda) = pper(A_1 - \lambda E) = pper(A_{t_1} - \lambda E) \cdot \ldots \cdot pper(A_{t_k} - \lambda E), \tag{5}$$

$$\psi_1(\sigma) = ddet(A_1 - \sigma E) = ddet(A_{t_1} - \sigma E) \cdot \ldots \cdot ddet(A_{t_k} - \sigma E). \tag{6}$$

Відповідно для матриці A_2 :

$$\varphi_2(\lambda) = pper(A_2 - \lambda E) = pper(A_{p_1} - \lambda E) \cdot \ldots \cdot pper(A_{p_k} - \lambda E), \tag{7}$$

$$\psi_2(\sigma) = ddet(A_2 - \sigma E) = ddet(A_{p_1} - \sigma E) \cdot \ldots \cdot ddet(A_{p_k} - \sigma E). \tag{8}$$

Розглянемо довільну характеристичну матрицю $A_{t_i} - \lambda E$.

$$A_{t_i} - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & & & \\ 1 & 1-\lambda & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}_{t_i}$$

і знайдемо значення її парафункцій:

$$pper(A_{t_i} - \lambda E)$$

$$= C^0_{t_i-1}(1-\lambda) + C^1_{t_i-1}(1-\lambda)^2 + C^2_{t_i-1}(1-\lambda)^3 + \ldots + C^{t_i-1}_{t_i-1}(1-\lambda)^{t_i} = (1-\lambda)(2-\lambda)^{t_i-1}, \quad (9)$$

$$ddet(A_{t_i} - \sigma E)$$

$$= (-1)^{t_i-1}C^0_{t_i-1}(1-\sigma) + (-1)^{t_i-2}C^1_{t_i-1}(1-\sigma)^2 + (-1)^{t_i-3}C^2_{t_i-1}(1-\sigma)^3 + \ldots + (-1)^0 C^{t_i-1}_{t_i-1}(1-\sigma)^{t_i}$$
$$= (1-\sigma)((1-\sigma)-1)^{t_i-1} = (1-\sigma)((-\sigma)^{t_i-1}. \quad (10)$$

Використавши рівність (9), перепишемо рівності (5) і (7) у вигляді:

$$\varphi_1(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^{t_1-1} \cdot (1-\lambda)(2-\lambda)^{t_2-1} \cdot \ldots \cdot (1-\lambda)(2-\lambda)^{t_k-1}$$
$$= (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{t_1+t_2+\ldots+t_k-k} = (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{n-k}$$

$$\varphi_2(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^{p_1-1} \cdot (1-\lambda)(2-\lambda)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (1-\lambda)(2-\lambda)^{p_k-1}$$
$$= (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{p_1+p_2+\ldots+p_k-k} = (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{n-k}.$$

Отже, $\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$.

А для (6) і (8) використаємо (10) .

$$\psi_1(\sigma) = (1-\sigma)(-\sigma)^{t_1-1} \cdot (1-\sigma)(-\sigma)^{t_2-1} \cdot \ldots \cdot (1-\sigma)(-\sigma)^{t_k-1}$$
$$= (1-\sigma)^k(-\sigma)^{t_1+t_2+\ldots+t_k-k} = (1-\sigma)^k(-\sigma)^{n-k},$$

$$\psi_2(\sigma) = (1-\sigma)(-\sigma)^{p_1-1} \cdot (1-\sigma)(-\sigma)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (1-\sigma)(-\sigma)^{p_k-1}$$
$$= (1-\sigma)^k(-\sigma)^{p_1+p_2+\ldots+p_k-k} = (1-\sigma)^k(-\sigma)^{n-k},$$

Тобто $\psi_1(\sigma) = \psi_2(\sigma)$. Отже, рівності (3) і (4) виконуються.

□

Наслідок 2. *1. Знаючи кількість компонент для матриці A транзитивно замкненого графа G, можна знайти значення парафункцій за формулами*

$$pperA = \varphi(0) = (1-0)^k(2-0)^{n-k} = 2^{n-k,}$$

$$ddetA = \psi(0) = (1-0)^k 0^{n-k} = 0$$

2. Власне значення $\lambda_0 = \sigma_0 = 1$ для многочленів $\varphi\lambda)$ та $\psi(\sigma)$ відповідно має кратність, що дорівнює кількості компонент графа G.

Це випливає з рівностей

$$\varphi\lambda) = (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{n-k}, \quad (11)$$

$$\psi(\sigma) = (1-\sigma)^k(-\sigma)^{n-k}. \quad (12)$$

3. *Сума коефіцієнтів біля λ^{n-1} та σ^{n-1} у характеристичних многочленах $\varphi\lambda)$ та $\psi(\sigma)$ не залежить від кількості компонент k і дорівнює $(-1)^{n-1}\cdot 2n$.*

   Доведення. Знайдемо коефіцієнти біля λ^{n-1} та σ^{n-1} у характеристичних многочленах (11) та (12).

   $\varphi\lambda) = (1-\lambda)^k(2-\lambda)^{n-k} = (1+\ldots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}\lambda^{k-1}+(-1)^k\lambda^k)\cdot(2^k+\ldots+(-1)^{n-k-1}\cdot 2C_{n-k}^{n-k-1}\lambda^{n-k-1}+(-1)^{n-k}\lambda^{n-k} = (1+\ldots+(-1)^{k-1}k\lambda^{k-1}+(-1)^k\lambda^k)\cdot(2^k+\ldots+(-1)^{n-k-1}\cdot 2n-k\lambda^{n-k-1}+(-1)^{n-k}\lambda^{n-k})$,

   $\psi(\sigma) = (1-\sigma)^k(-\sigma)^{n-k} = (1+\ldots+(-1)^{k-1}k\sigma^{k-1}+(-1)^k\sigma^k)\cdot(-\sigma)^{n-k}$.

   Тоді коефіцієнти біля λ^{n-1} матимуть вигляд $(-1)^{k-1}\cdot k\cdot(-1)^k\cdot 2\cdot(-1)^{n-k-1}(n-k) = (-1)^{n-1}(2n-k)$. А біля $\sigma^{n-1}: (-1)^{k-1}\cdot(-1)^{n-k} = (-1)^{n-1}\cdot k$.

   Додавши отримані значення, одержимо, що їх сума дорівнює $(-1)^{n-1}\cdot 2n$. □

4. *Кількість компонент k графа G^T дорівнює модулю коефіцієнта біля σ^{n-1} в характеристичному многочлені $\psi(\sigma) : |(-1)^{n-1}\cdot k| = k$.*

5. *Сума власних значень характеристичного многочлена $\psi(\sigma)$ дорівнює кількості компонент k.*

   Доведення. Нехай відомі власні значення $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ За теоремою Вієта їхня сума дорівнює відношенню $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, де a_{n-1}, a_n- коефіцієнти відповідно біля σ^{n-1} та σ^n. Отже, $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n = -\frac{\sigma^{n-1}}{\sigma^n} = k$. . □

Теорема 2. *Для $\forall k \in N$, де $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, існує трикутна $(0,1)$-матриця A $(n+1)$-го порядку, для якої $pper A = k$.*

Доведення. Довільне натуральне число можна однозначно подати у вигляді суми різних степенів числа 2, тобто у вигляді: $k = 2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_p}$, де $m_1 < m_2 < \ldots < m_p$.

За числами $m_1, m_2, \ldots, m_p$ будуємо трикутну матрицю A $(n+1)$-го порядку:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ n-m_1 \text{ рядок } - \\ \\ \\ n-m_2 \text{ рядок } - \\ \\ \\ n-m_p \text{ рядок } - \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & & \\
\ldots & \ddots & & & & & & & & & & \\
0 & \ldots & 1 & & & & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & 1 & & & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & \\
0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1
\end{array}\right)_{n+1}$$

В даній матриці A на діагоналі завжди стоять одиниці. Зліва від $(n-m_1)$-го стовпця на всіх місцях стоять нулі, а справа – одиниці. А у $(n-m_1)$-му стовпці одиниці стоять тільки в $(n-m_i)$-их рядках, де $i=1,2,\ldots,p$.

Знайдемо значення $pperA$ за елементами вписаної таблиці $T(n-m_1.)$ Але оскільки в ній всі стовпці, крім $(n-m_1)$-го нульові, то отримаємо:

$$pperA=\sum_{r=n-m_1}^{n+1}\{a_{r,n-m_1}\}\cdot P_{r,n-m_1}=\sum_{i=1}^{p}\{a_{n-m_i,n-m_1}\}\cdot P_{n-m_i,n-m_1}.$$

Факторіальний добуток $\{a_{n-m_i,n-m_1}\}=1$, для $\forall i=1,2,\ldots,p$. А алгебраїчні доповнення дорівнюють

$$P_{n-m_i,n-m_1}=pper(P_{n-m_1-1,1})\cdot pper(P_{n+1,n-m_i+1})$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{n-m_1-1}\cdot\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}_{m_i+1}=1\cdot 2^{m_i}.$$

Отже,

$$pperA=\sum_{i=1}^{p}2^{m_i}.$$

А це і є двійковим розкладом числа k. □

Приклад 1. *Побудуємо трикутну матрицю A 7-го порядку, для якої $pperA=21$.*

Для цієї матриці $n=7-1=6$. Запишемо двійковий розклад числа

$$21=2^4+2^2+2^0.$$

Тоді матриця

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\0&1&&&&&\\0&0&1&&&&\\0&1&1&1&&&\\0&0&1&1&1&&\\0&1&1&1&1&1&\\0&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

і буде шуканою.

Література

1. Берж К. Теория графов и ее применения. — М.: Издат. иностран. литер., 1962. — 32 с.

2. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С.3–17.

3. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. — М.: Наука, 1985. — 192 с.

4. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977. — 324 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 28.10.2011

Dovbnyak T.S. *Applications of parafunctions of the triangle* $(0,1)$*-matrices to finding the number of graphs connectivity*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 57–63.

Applications of parafunctions of the triangle $(0,1)$-matrices to finding the number of graphs connectivity are considered.

Довбняк Т.С. *Применение парафункций треугольных* $(0,1)$*-матриц к отысканию числа компонент связности графов* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 57–63.

Рассмотривается применение парафункций треугольных $(0,1)$-матриц к отысканию числа компонент связности графов.