Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.948

Костишин Л.П.[1], Бігун Я.Й.[2]

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Костишин Л.П., Бігун Я.Й. *Наближене розв'язування агрегаційно-ітеративним методом лінійного диференціального рівняння нейтрального типу* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 100–107.

У даній роботі розглядається лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу з двоточковими крайовими умовами. Агрегаційно-ітеративним методом побудовано ітераційний процес для наближення точного розв'язку та доведено його збіжність.

Вступ

Диференціальні рівняння нейтрального типу знаходять своє застосування при моделюванні процесів в екології [10], в задачах передачі сигналів [7] та ін. Поведінка розв'язків таких рівнянь значно складніша, порівняно з рівняннями запізнюючого типу. Зокрема, розв'язки таких рівнянь не згладжуються з ростом часу, ускладнюється побудова наближених розв'язків. Зокрема, це стосується диференціальних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом [3]. Розроблено різні підходи до побудови розв'язків рівнянь нейтрального типу: числові [9], апроксимація системами звичайних диференціальних рівнянь [5] та ін. У даній роботі розглядається застосування агрегаційно-ітеративного методу, основи якого закладено в працях Ю.Д Соколова [6], М.О. Красносельського, Е.А. Ліфшіца і А.В. Соболєва [2] та розвинуто Н.С. Курпелем [4] та Б.А. Шуваром [8]. Для лінійного диференціального рівняння з лінійно перетвореним аргументом цей метод застосований у праці [1].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

Ключові слова і фрази: диференціальні рівняння нейтрального типу, агрегаційно-ітеративний метод, ітераційний процес.

1 Перетворення диференціального рівняння.

Розглянемо агрегаційно-ітеративний метод у застосуванні до наближеного розв'язування диференціального рівняння нейтрального типу

$$x''(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x(\lambda t) + b_0(t)x'(t) + b_1(t)x'(\lambda t) + d(t)x''(\lambda t) + f(t), \tag{1}$$

з крайовими умовами вигляду $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, де $\lambda \in (0,1)$, $t_1 > 0$, функції a_0, a_1 і f — неперервні, b_0 і b_1 — неперервно диференційовні, а d — двічі неперервно диференційовна на інтервалі $(0, t_1)$.

Крайова задача для рівняння (1) зводиться до інтегрального рівняння шляхом інтегрування частинами в межах від 0 до t. Проінтегрувавши рівняння (1) одержимо:

$$x'(t) = c + b_0(t)x(t) + \frac{1}{\lambda}b_1(t)x(\lambda t) + \frac{1}{\lambda}d(t)x'(\lambda t) - \frac{1}{\lambda^2}d'(t)x'(\lambda t)$$
$$+ \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t (a_0(s) - b_0'(s))x(s)\,ds + \int_0^t (a_1(s) - \frac{1}{\lambda}b_1'(s) + \frac{1}{\lambda^2}d''(s))x(\lambda s)\,ds,$$

де $c = (1 - \frac{1}{\lambda}d(0))x'(0) + (\frac{1}{\lambda^2}d'(0) - b_0(0) - \frac{1}{\lambda}b_1(0))x_0$. Наступне інтегрування дає такий результат:

$$x(t) = ct + (1 - \frac{1}{\lambda^2}d(0))x_0 + \frac{1}{\lambda^2}d(t)x(\lambda t) + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds$$
$$+ \int_0^t (b_0(s) + (t-s)(a_0(s) - b_0'(s)))x(s)\,ds$$
$$+ \int_0^t (\frac{1}{\lambda}b_1(s) - \frac{2}{\lambda^2}d'(s) + (t-s)(a_1(s) - \frac{1}{\lambda}b_1'(s) + \frac{1}{\lambda^2}d''(s)))x(\lambda s)\,ds.$$

Введемо позначення:

$$k_1(t,s) = b_0(s) + (t-s)(a_0(s) - b_0'(s)),$$
$$k_2(t,s) = \frac{1}{\lambda}b_1(s) - \frac{2}{\lambda^2}d'(s) + (t-s)(a_1(s) - \frac{1}{\lambda}b_1'(s) + \frac{1}{\lambda^2}d''(s)),$$
$$p(t) = \frac{t}{t_1}x_1 - (1 - \frac{1}{\lambda^2}d(0))(1 - \frac{t}{t_1})x_0 + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds - \frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}(t_1 - s)f(s)\,ds.$$

Тоді для розв'язку крайової задачі $x(t)$ одержимо інтегральне рівняння

$$x(t) = ct + (1 - \frac{1}{\lambda^2}d(0))x_0 + \frac{1}{\lambda^2}d(t)x(\lambda t)$$
$$+ \int_0^t (t-s)f(s)\,ds + \int_0^t k_1(t,s)x(s)\,ds + \int_0^t k_2(t,s)x(\lambda s)\,ds.$$

Залишається знайти значення c. Для цього скористаємося другою з крайових умов $x(t_1) = x_1$. Після відповідних перетворень одержимо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} x(t) =\,& p(t) + \frac{1}{\lambda^2}d(t)x(\lambda t) - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)x(\lambda t_1) + \int_0^t k_1(t,s)x(s)\,ds \\ &+ \int_0^t k_2(t,s)x(\lambda s)\,ds - \frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_1(t_1,s)x(s)\,ds - \frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_2(t_1,s)x(\lambda s)\,ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Згідно з методикою, викладеною в праці [8], побудову ітераційного процесу застосуємо до цього інтегрального рівняння у поєднанні з додатковим рівнянням вигляду

$$\begin{aligned} y = \mu y - \int_0^{t_1} \varphi(t)p(t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \varphi(t)d(t)x(\lambda t)\,dt \\ +\frac{1}{\lambda^2 t_1}d(t_1)x(\lambda t_1)\int_0^{t_1} t\varphi(t)\,dt - \int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_1(t,s)x(s)\,ds \\ -\int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_2(t,s)x(\lambda s)\,ds + \int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^{t_1} k_2(t_1,s)x(\lambda s)\,ds, \end{aligned} \tag{3}$$

де дійсне число $\mu \neq 1$ і функція $\varphi \in C(0,t_1)$ вибрані довільно, але так, щоб виконувалась рівність

$$\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)\varphi(t)\,dt = -\mu\varphi(s). \tag{4}$$

Доведемо наступне твердження.

Лема 1. *Нехай пара $\{x^*(t),y^*\}$ — розв'язок системи рівнянь (2), (3), тоді вона задовольняє рівняння*

$$\int_0^{t_1}\varphi(t)x(t)\,dt + y = 0. \tag{5}$$

Доведення. Із системи рівнянь (2), (3) знаходимо

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)\,dt + y^* = \int_0^{t_1}\varphi(t)p(t)\,dt + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1}\varphi(t)d(t)x^*(\lambda t)\,dt \\ -\frac{1}{\lambda^2 t_1}d(t_1)x^*(\lambda t_1)\int_0^{t_1} t\varphi(t)\,dt + \int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_1(t,s)x^*(s)\,ds \\ +\int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_2(t,s)x^*(\lambda s)\,ds - \int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^{t_1}k_1(t_1,s)x^*(s)\,ds \\ -\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)x^*(\lambda s)\,ds + \mu y^* - \int_0^{t_1}\varphi(t)p(t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1}\varphi(t)d(t)x^*(\lambda t)\,dt \\ +\frac{1}{\lambda^2 t_1}d(t_1)x^*(\lambda t_1)\int_0^{t_1} t\varphi(t)\,dt - \int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_1(t,s)x^*(s)\,ds \\ -\int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_2(t,s)x^*(\lambda s)\,ds + \int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)x^*(\lambda s)\,ds \\ = \mu y^* - \int_0^{t_1}x^*(s)\,ds\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)\varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Згідно з умовою (4) остання рівність набуває вигляду

$$\int_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)\,dt + y^* = \mu\Big(\int_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)\,dt + y^*\Big).$$

Звідси одержимо

$$(1-\mu)\Big(\int_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)\,dt + y^*\Big) = 0.$$

Оскільки $\mu \neq 1$, то це означає, що розв'язок системи рівнянь (2), (3) $x^*(t), y^*$ задовольняє співвідношення (5). □

2 Побудова агрегаційно-ітеративного алгоритму.

Для наближеного розв'язування системи рівнянь (2), (3) побудуємо послідовні наближення вигляду

$$x^{(n+1)}(t) = p(t) + \frac{1}{\lambda^2} d(t) x^{(n)}(\lambda t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{t}{t_1} d(t_1) x^{(n)}(\lambda t_1) + \int_0^t k_1(t,s) x^{(n)}(s)\, ds$$

$$+ \int_0^t k_2(t,s) x^{(n)}(\lambda s)\, ds - \frac{t}{t_1} \int_0^{t_1} k_1(t_1,s) x^{(n)}(s)\, ds \tag{6}$$

$$- \frac{t}{t_1} \int_0^{t_1} k_2(t_1,s) x^{(n)}(\lambda s)\, ds + a^{(n)}(t)(y^{(n)} - y^{(n+1)}),$$

$$y^{(n+1)} = \mu y^{(n+1)} - \int_0^{t_1} \varphi(t) p(t)\, dt - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{t_1} \varphi(t) d(t) x^{(n)}(\lambda t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 t_1} d(t_1) x^{(n)}(\lambda t_1) \int_0^{t_1} t\varphi(t)\, dt - \int_0^{t_1} \varphi(t)\, dt \int_0^t k_1(t,s) x^{(n)}(s)\, ds \tag{7}$$

$$- \int_0^{t_1} \varphi(t)\, dt \int_0^t k_2(t,s) x^{(n)}(\lambda s)\, ds + \int_0^{t_1} \frac{t}{t_1} \varphi(t)\, dt \int_0^{t_1} k_2(t_1,s) x^{(n)}(\lambda s)\, ds, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

в яких неперервні функції $a^{(n)}(t)$ вибираються таким чином, щоб справджувались співвідношення

$$\int_0^{t_1} \varphi(t) a^{(n)}(t)\, dt = \mu. \tag{8}$$

Означимо множину E_0 як множину, яка складається з пар $\{x(t), y\}$, що задовольняють умову (5).

Лема 2. *Нехай $\mu \neq 1$, тоді утворені за допомогою алгоритму (6), (7) послідовності $\{x^{(n)}(t)\}$ і $\{y^{(n)}\}$ визначені при $n = 0, 1, \ldots$ і при цьому $\{x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}\} \in E_0$.*

Доведення. Використаємо принцип математичної індукції. Для цього виберемо початкове наближення $x^{(0)}(t), y^{(0)}$ так, щоб виконувалась рівність (5). Далі припустимо, що послідовність $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$ визначена при $n = 0, 1, \ldots$. Тоді з формул (6), (7) знаходимо

$$\int_0^{t_1} \varphi(t) x^{(n+1)}(t)\, dt + y^{(n+1)} = y^{(n+1)}(\mu - \int_0^{t_1} \varphi(t) a^{(n)}(t)\, dt) + y^{(n)} \int_0^{t_1} \varphi(t) a^{(n)}(t)\, dt$$

$$- \int_0^{t_1} x^{(n)}(s)\, ds \int_0^{t_1} \frac{t}{t_1} k_1(t_1,s) \varphi(t)\, dt.$$

Згідно з формулою (4), а також (8), одержимо, що

$$\int_0^{t_1} \varphi(t) x^{(n+1)}(t)\, dt + y^{(n+1)} = \mu(\int_0^{t_1} \varphi(t) x^{(n)}(t)\, dt + y^{(n)}).$$

Оскільки для n-го наближення виконується умова $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\} \in E_0$, то на підставі останньої рівності можна стверджувати, що $\{x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}\} \in E_0$. □

На підставі того, що n-не наближення і розв'язок належать множині E_0, можна сформулювати твердження, яке є наслідком лем 1 та 2.

Наслідок. *Нехай виконуються умови лем 1 та 2, тоді будуть справджуватися рівності*

$$\int_0^{t_1} \varphi(t)(x^{(n)}(t) - x^*(t))\,dt + (y^{(n+1)} - y^*) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Підставимо розв'язок $x^*(t), y^*$ системи рівнянь (2), (3) та n-те наближення $x^{(n)}(t), y^{(n)}$ у формулу (5). Одержані рівності віднімемо одне від одного, тоді одержимо формулу (9). □

3 Теорема про збіжність наближеного процесу.

Для встановлення достатніх умов збіжності утворимо різницю

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1-\mu}(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \frac{t}{t_1}\varphi(t)d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))\,dt$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \varphi(t)d(t)(x^{(n)}(\lambda t) - x^*(\lambda t))\,dt - \int_0^{t_1} \varphi(t)\,dt \int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds \tag{10}$$

$$-\int_0^{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds + \int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)\,dt\int_0^{t_1} k_2(t_1,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds).$$

Введемо позначення:

$$h_1(t,s) = -\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s) - a^{(n)}(t)\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}\int_s^{t_1} k_1(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

$$h_2(t,s) = -\frac{t}{t_1}k_2(t_1,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}(\frac{1}{\lambda^2}\varphi(s)d(s) + \int_s^{t_1} k_1(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_0^{t_1}\frac{\tau}{t_1}k_2(t_1,s)\varphi(\tau)\,d\tau).$$

Теорема. *Нехай:*

1. *параметр $\mu \neq 1$;*
2. *для початкового наближення виконується умова $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in E_0$;*
3. *справджуються оцінки: $|k_1(t,s)| \leq \bar{k_1}, |k_2(t,s)| \leq \bar{k_2}, |h_1(t,s)| \leq \bar{h_1}, |h_2(t,s)| \leq \bar{h_2}, |a^n(t)| \leq \bar{a}, |\varphi(s)| \leq \bar{\varphi}, |d(t)| \leq \bar{d}$;*
4. $q = \frac{2}{\lambda^2}\bar{d} + t_1(\frac{\bar{a}\bar{\varphi}}{\lambda^2|1-\mu|}\bar{d} + \bar{k_1} + \bar{k_2} + \bar{h_1} + \bar{h_2}) < 1.$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$, визначена згідно з формулами (6), (7), збігається до розв'язку $x^*(t)$ задачі (2), причому швидкість збіжності не менша за швидкість збіжності геометричної прогресії із знаменником q.

Доведення. Для дослідження збіжності ітераційного алгоритму розглянемо різницю $x^{(n)}(t) - x^*(t)$, яку знаходимо з інтегрального рівняння (2) та формул (6) для $(n+1)$-го наближення. Маємо:

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \frac{1}{\lambda^2}d(t)(x^{(n)}(\lambda t) - x^*(\lambda t)) - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))$$

$$+\int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds$$

$$-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_1(t_1,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))\,ds - \frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_2(t_1,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))\,ds + a^{(n)}(t)(y^{(n)}-y^{(n+1)}).$$

В одержаному результаті запишемо різницю $(y^{(n)} - y^{(n+1)})$ у вигляді

$$y^{(n)} - y^{(n+1)} = a^{(n)}(t)(y^{(n)} - y^*) - a^{(n)}(t)(y^{(n+1)} - y^*),$$

і скористаємося формулами (9) та (10). Тоді

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \frac{1}{\lambda^2}d(t)(x^{(n)}(\lambda t) - x^*(\lambda t)) - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))$$

$$+\int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds$$

$$-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_1(t_1,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds - \frac{t}{t_1}\int_0^{t_1} k_2(t_1,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds$$

$$-a^{(n)}(t)\int_0^{t_1} \varphi(s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds + \frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))\,ds$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \varphi(s)d(s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds - \int_0^{t_1}(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds\int_s^{t_1} k_1(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$-\int_0^{t_1}(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds\int_s^{t_1} k_2(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$+\int_0^{t_1}(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds\int_0^{t_1} \frac{\tau}{t_1}k_2(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau).$$

Проведемо деякі перетворення:

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \frac{1}{\lambda^2}d(t)(x^{(n)}(\lambda t) - x^*(\lambda t)) - \frac{1}{\lambda^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1} \frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1) - x^*(\lambda t_1))\,ds + \int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds$$

$$+\int_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))\,ds + \int_0^{t_1}[-\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s) - a^{(n)}(t)\varphi(s)$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}\int_s^{t_1} k_1(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau](x^{(n)}(s) - x^*(s))\,ds + \int_0^{t_1}[-\frac{t}{t_1}k_2(t_1,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}(\frac{1}{\lambda^2}\varphi(s)d(s)$$

$$+\int_s^{t_1} k_1(\tau,s)\varphi(\tau)\,d\tau-\int_0^{t_1}\frac{\tau}{t_1}k_2(t_1,s)\varphi(\tau)\,d\tau)](x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))\,ds.$$

Враховуючи позначення (11) запишемо:

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\frac{1}{\lambda^2}d(t)(x^{(n)}(\lambda t)-x^*(\lambda t))-\frac{1}{\lambda^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1)-x^*(\lambda t_1))$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\mu}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)(x^{(n)}(\lambda t_1)-x^*(\lambda t_1))\,ds+\int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))\,ds$$

$$+\int_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))\,ds+\int_0^{t_1} h_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))\,ds \qquad (12)$$

$$+\int_0^{t_1} h_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))\,ds.$$

Із (12) можна одержати наступні оцінки:

$$|x^{(n+1)}(t)-x^*(t)|\le\frac{1}{\lambda^2}|d(t)||x^{(n)}(\lambda t)-x^*(\lambda t)|+\frac{1}{\lambda^2}\frac{|t|}{t_1}|d(t_1)||x^{(n)}(\lambda t_1)-x^*(\lambda t_1)|$$

$$+\frac{|a^{(n)}(t)|}{|1-\mu|}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{t_1}\frac{|t|}{t_1}|\varphi(s)||d(t_1)||x^{(n)}(\lambda t_1)-x^*(\lambda t_1)|\,ds+\int_0^t|k_1(t,s)||(x^{(n)}(s)-x^*(s))|\,ds$$

$$+\int_0^t|k_2(t,s)||x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s)|\,ds+\int_0^{t_1}|h_1(t,s)||x^{(n)}(s)-x^*(s)|\,ds$$

$$+\int_0^{t_1}|h_2(t,s)||x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s)|\,ds.$$

Перейшовши до норми в просторі $C[0,t_1]$ отримаємо:

$$\|x^{(n+1)}(t)-x^*(t)\|\le(\frac{1}{\lambda^2}|d(t)|+\frac{1}{\lambda^2}|d(t_1)|+\int_0^{t_1}(\frac{1}{\lambda^2}\frac{|a^{(n)}(t)|}{|1-\mu|}|\varphi(s)||d(t_1)|+|k_1(t,s)|+|k_2(t,s)|$$

$$+|h_1(t,s)|+|h_2(t,s)|)\,ds)\|x^{(n)}(t)-x^*(t)\|.$$

На підставі оцінок теореми остання нерівність набуде вигляду:

$$\|x^{(n+1)}(t)-x^*(t)\|\le q\|x^{(n)}(t)-x^*(t)\|.$$

Отже, можна стверджувати, що послідовність $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}$ збігається до розв'язку $x^*(t)$ задачі (2), причому швидкість збіжності не менша за швидкість збіжності геометричної прогресії із знаменником q. □

Література

1. Бігун Я.Й., Костишин Л.П. *Застосування однопараметричного агрегаційно-ітеративного методу до диференціального рівняння з аргументам, що відхиляється* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. — 2010. — Вип. 528. — С. 5–9.
2. Красносельський М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 255 с.

3. Кук К., Россовский Л.Е., Скубачевский А.Л. *Краевая задача для функционально-диференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом* // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т.31, №7. — С. 1366–1370.

4. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — К.: Наукова думка, 1968. — 243 с.

5. Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелін. колив. — 2007. — Т.10, №3. — С. 328–335.

6. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. — К.: Наукова думка, 1967. — 336 с.

7. Хейл Дж. Теория функционально-диференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

8. Шувар Б.А. *Однопараметричне ітеративне агрегування для інтегральних рівнянь Фредгольма* // Вісник Львів. політехн. ін-ту. — 1993. — С. 215–219.

9. Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 2003, 410 p.

10. Kuang Ya. Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics, Academic Press. Ins., Boston, 1993, 398 p.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
email: *lyubapav@gmail.com*

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
email: *yaroslav.bihun@gmail.com*

Надійшло 17.11.2011

Kostyshyn L.P., Bigun Ya.J *Approximate solution of linear differential equations of neutral type by aggregative-iterative method*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 100–107.

This article is devoted to linear differential equation of neutral type with two-point boundary conditions. Iteration process for approximate solution is constructed by aggregation-iterative method and its convergence is proved.

Костишин Л.П., Бигун Я.Й. *Приближенное решение агрегационно-итеративным методом линейного дифференциального уравнения нейтрального типа* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 100–107.

В данной работе рассматривается линейное дифференциальное уравнение нейтрального типа с двухточечными краевыми условиями. Агрегационно-итеративным методом построен итерационный процес для приближенного решения и доказана его сходимость.