Карпатські математичні
публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.3, №1

УДК 517.51

Пернай С.А., Черевко І.М.

СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Пернай С.А., Черевко І.М. *Схема апроксимації підвищеної точності диференціальних рівнянь нейтрального типу* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 112–123.

Досліджено властивості розв'язку початкової задачі для диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу. Уточнено оцінку наближення елемента запізнення схемою підвищеної точності, за допомогою якої побудовано та обгрунтовано схему апроксимації підвищеної точності рівняння нейтрального типу послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Вступ

Схема апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше була запропонована М.М. Красовським [1] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням. Точність апроксимації нелінійних ДРР із запізненням досліджена Ю.М. Рєпіним в [6]. У цій роботі вперше досліджується апроксимація скалярного елемента запізнення у випадку, коли його вхідна функція є диференційованою, або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації ДРР в просторах неперервних функцій на скінченому інтервалі здійснено в роботах І.М. Черевка та Л.А. Піддубної [4, 5]. Дослідження схеми апроксимації системи диференціально-різницевого та різницевого рівнянь дозволило поширити схему Красовського-Рєпіна на випадок ДРР нейтрального типу за Хейлом [8]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем ДРР запізнюючого і нейтрального типів здійснено в роботах І.М. Черевка та О.В. Матвія [2, 3]. Схема апроксимації ДРР із запізненням підвищеної точності запропонована у роботах [11, 9]. Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації підвищеної точності для ДРР нейтрального типу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34K07, 34K28, 34K40.
Ключові слова і фрази: схема апроксимації підвищеної точності, диференціально-різницеве рівняння, диференціальні рівняння нейтрального типу, оцінка наближення.

1 Постановка задачі. Схема апроксимації

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi_0(t),\ x'(t) = \varphi_0'(t),\ t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

де $\tau > 0; f(t, u_0, u_1, u_1')$ — неперервна функція, визначена для $t \in [0, T],\ u_0, u_1, u_1' \in R$, що задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(t_1, u_0, u_1, u_1') - f(t_2, v_0, v_1, v_1')| \le K(|t_1 - t_2| + |u_0 - v_0| + |u_1 - v_1| + |u_1' - v_1'|), \tag{3}$$

$K > 0,\ t_1, t_2 \in [0, T]$; $\varphi_0(t)$ — задана при $t \in [-\tau, 0]$ диференційовна функція, похідна якої задовольняє умову Ліпшиця

$$|\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(t_2)| \le L_0|t_1 - t_2|,\ L_0 > 0,\ t_1, t_2 \in [-\tau, 0]. \tag{4}$$

Визначимо функції $z_j(t),\ j = \overline{0, m},$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_m(t), z_m'(t)),\\ &\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\tau}{m}\right)^2 z_j'' + \tfrac{\tau}{m} z_j' + z_j = z_{j-1}, \quad j = \overline{1, m} \end{aligned} \tag{5}$$

з початковими умовами

$$z_0(0) = \varphi_0(0), \quad z_j(0) = \varphi_0(-\tfrac{j\tau}{m}), \quad z_j'(0) = \varphi_0'(-\tfrac{j\tau}{m}),\ j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Вважатимемо, що розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2), якщо

$$\left|x\left(t - \tfrac{\tau j}{m}\right) - z_j(t)\right| \to 0,\ j = \overline{0, m},\ t \in [0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

2 Властивості розв'язків початкової задачі (1)–(2)

При наведених в першому пункті умовах розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно-диференційовною функцією на $[-\tau, T]$ за можливим винятком точок $t = k\tau, k = 0, 1, \ldots$. Для існування похідної розв'язку в точці $t = 0$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова склейки (див. [10])

$$\varphi_0'(0) = f(0, \varphi_0(0), \varphi_0(-\tau), \varphi_0'(-\tau)). \tag{7}$$

Легко бачити, що при виконанні умови (7) розв'язок задачі (1)–(2) також неперервно-диференційовний в точках $t = k\tau, k = 1, 2, \ldots$.

Лема 2.1. *Нехай справджуються умови (3),(4) та виконується умова склейки (7). Тоді розв'язок $x(t)$ початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний на $[-\tau, T]$ і $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| \le L|t_1 - t_2|, \quad L > 0, \ t_1, t_2 \in [-\tau, T]. \tag{8}$$

Доведення. Розв'язуючи задачу (1)–(2) методом кроків, дістаємо послідовність задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_k(t - \tau), \varphi_k'(t - \tau)), \ t \in [k\tau, (k+1)\tau], \tag{9}$$

$$x(k\tau) = \varphi_k(k\tau), \ k = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{10}$$

При виконанні умови (3) існує єдиний розв'язок $x(t) = \varphi_{k+1}(t), k = 0, 1, 2, \ldots,$ задачі (9)–(10), причому $\varphi_{k+1}(t) \in C^1[k\tau, (k+1)\tau], \ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Якщо умова (7) справджується, тоді розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно-диференційовний в точці $t = 0$ [10] і, як видно з рівняння (1), $x'(t)$ буде неперервною в точках $t = k\tau, k = 1, 2, \ldots$. Таким чином, при виконанні умов (3),(7) розв'язок початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний на $[-\tau, T]$.

Покажемо, що умова (8) також справджується. Спочатку розглянемо відрізок $[-\tau, \tau]$.

1) Якщо $t_1, t_2 \in [-\tau, 0]$, то (8) справджується згідно умови (4) при $L = L_0$.

2) Нехай $t_1, t_2 \in [0, \tau]$. При $t \in [0, \tau]$ розв'язок $x(t) = \varphi_1(t)$ початкової задачі (1)–(2) неперервно-диференційовний. Тоді, використовуючи властивості функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ і умови (3)–(4), маємо

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |f(t_1, x(t_1), \varphi_0(t_1 - \tau), \varphi_0'(t_1 - \tau)) - f(t_2, x(t_2), \varphi_0(t_2 - \tau), \varphi_0'(t_2 - \tau))| \le$$
$$K(|t_1 - t_2| + |\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)| + |\varphi_0(t_1 - \tau) - \varphi_0(t_2 - \tau)| + |\varphi_0'(t_1 - \tau) - \varphi_0'(t_2 - \tau)|) \le$$
$$K(|t_1 - t_2| + \max_{s \in [0,\tau]} |\varphi_1'(s)||t_1 - t_2| + \max_{s \in [-\tau,0]} |\varphi_0'(s)||t_1 - t_2| + L_0|t_1 - t_2|) =$$
$$K(1 + \max_{s \in [0,\tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau,0]} |\varphi_0'(s)| + L_0)|t_1 - t_2|.$$

3) Якщо $t_1 \in [-\tau, 0]$, а $t_2 \in [0, \tau]$, то одержуємо

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |\varphi_0'(t_1) - x'(t_2)| = |\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(0) + \varphi_0'(0) - x'(t_2)| \le |\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(0)| + |x'(0) -$$
$$x'(t_2)| \le L_0|t_1 - 0| + |f(0, \varphi_1(0), \varphi_0(-\tau), \varphi'(-\tau)) - f(t_2, \varphi_1(t_2), \varphi_0(t_2 - \tau), \varphi_0'(t_2 - \tau))| \le$$
$$L_0|t_1 - t_2| + K(|0 - t_2| + \max_{s \in [0,\tau]} |\varphi_1'(s)||0 - t_2| + \max_{s \in [-\tau,0]} |\varphi_0'(s)||0 - t_2| + L_0|0 - t_2|) \le$$
$$(L_0 + K(1 + \max_{s \in [0,\tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau,0]} |\varphi_0'(s)| + L_0))|t_1 - t_2|.$$

Отже, $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[-\tau, \tau]$:

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| \le L_1|t_1 - t_2|, \quad L_1 > 0, \ t_1, t_2 \in [-\tau, \tau],$$

де $L_1 = L_0 + K(1 + \max_{s \in [0,\tau]} |\varphi_1'(s)| + \max_{s \in [-\tau,0]} |\varphi_0'(s)| + L_0)$.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(2) задовольняє умову (8) при $t \in [-\tau, j\tau]$, $j \geq 1$, з $L = L_j$. Покажемо, що ця умова справедлива для $t \in [-\tau, (j+1)\tau]$.

1) Якщо $t_1, t_2 \in [-\tau, j\tau]$, то властивість (8) справджується за припущення з $L = L_j$.

2) Нехай $t_1, t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$. На цьому відрізку розв'язок $x(t) = \varphi_{j+1}(t)$ початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний. Тоді, використовуючи властивості функцій $\varphi_j(t), \varphi_{j+1}(t)$ і умову (3), маємо

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |f(t_1, x(t_1), \varphi_j(t_1 - \tau), \varphi'_j(t_1 - \tau)) - f(t_2, x(t_2), \varphi_j(t_2 - \tau), \varphi'_j(t_2 - \tau))| \leq$$

$$K(1 + \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| + \max_{s \in [(j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)| + L_j)|t_1 - t_2|.$$

3) Якщо $t_1 \in [p\tau, (p+1)\tau],\ 0 \leq p \leq j,\ t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$, то маємо

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |f(t_1, x(t_1), \varphi_p(t_1 - \tau), \varphi'_p(t_1 - \tau)) - f(t_2, x(t_2), \varphi_j(t_2 - \tau), \varphi'_j(t_2 - \tau))| \leq$$

$$K(|t_1 - t_2| + |\varphi_{p+1}(t_1) - \varphi_{j+1}(t_2)| + |\varphi_p(t_1 - \tau) - \varphi_j(t_2 - \tau)| + |\varphi'_p(t_1 - \tau) - \varphi'_j(t_2 - \tau)|) \leq$$

$$K(|t_1 - t_2| + |\varphi_{p+1}(t_1) - \varphi_{p+1}((p+1)\tau) + \varphi_{p+2}((p+1)\tau) - \ldots + \varphi_{j+1}(j\tau) - \varphi_{j+1}(t_2)| +$$

$$|\varphi_p(t_1 - \tau) - \varphi_p(p\tau) + \varphi_{p+1}(p\tau) - \ldots + \varphi_j((j-1)\tau) - \varphi_j(t_2 - \tau)| |\varphi'_p(t_1 - \tau) - \varphi'_p(p\tau) + \varphi'_{p+1}(p\tau) - \ldots +$$

$$\varphi'_j((j-1)\tau) - \varphi'_j(t_2 - \tau)| \leq K(1 + \max_{s \in [(p-1)\tau, p\tau]} |\varphi'_p(s)| + 2(\max_{s \in [p\tau, (p+1)\tau]} |\varphi'_{p+1}(s)| + \ldots +$$

$$\max_{s \in [(j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)|) + \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| + L_p + L_{p+1} + \ldots + L_j)|t_1 - t_2|.$$

4) При $t_1 \in [-\tau, 0]$, $t_2 \in [j\tau, (j+1)\tau]$ аналогічно одержуємо, що

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| \leq (L_0 + K(1 + \max_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi'_0(s)| + 2(\max_{s \in [0, \tau]} |\varphi'_1(s)| + \ldots +$$

$$\max_{s \in [(j-1)\tau, j\tau]} |\varphi'_j(s)|) + \max_{s \in [j\tau, (j+1)\tau]} |\varphi'_{j+1}(s)| + L_0 + \ldots + L_j)|t_1 - t_2| \leq L_{j+1}|t_1 - t_2|.$$

Отже, $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця при $t \in [-\tau, (j+1)\tau]$ з $L = L_{j+1}$. Оскільки j — довільне ціле, то умова (8) справджується при $t \in [-\tau, T]$. Лема 2.1 доведена. $\square$

3 Апроксимація елемента запізнення

Лема 3.1. *Розглянемо задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь*

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z''_1(t) + \frac{\tau}{m} z'_1(t) + z_1(t) = x(t), \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z''_j(t) + \frac{\tau}{m} z'_j(t) + z_j(t) = z_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, m}, \end{array} \tag{11}$$

$$z_j(0) = x(-\tfrac{j\tau}{m}), \quad z'_j(0) = x'(-\tfrac{j\tau}{m}), \quad j = \overline{1, m}, \tag{12}$$

де $x(t)$ — функція, визначена на $[-\tau, T]$, похідна якої задовольняє умову Ліпшиця, τ, T — сталі. Тоді для $m > 2\tau$ справедливими будуть співвідношення

$$\left| z_j(t) - x(t - \tfrac{j\tau}{m}) \right| \leq \frac{A_1}{m},\ j = \overline{1, m},\ t \in [0, T], \tag{13}$$

$$\left| z'_j(t) - x'(t - \tfrac{j\tau}{m}) \right| \leq \frac{A_2}{m},\ j = \overline{1, m},\ t \in [0, T], \tag{14}$$

де $A_1, A_2 > 0$ — сталі, що не залежить від j та m.

Доведення. Розглянемо спочатку задачу

$$\frac{\tau^2}{2}z''(t)+\tau z'(t)+z(t)=x(t),\ z(0)=x(-\tau),\ z'(0)=x'(-\tau). \tag{15}$$

Позначимо $y(t)=x(t-\tau)$ і оцінимо різниці $\varepsilon(t)=z(t)-y(t)$ та $\varepsilon'(t)=z'(t)-y'(t)$. Згідно (15), $\varepsilon(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\varepsilon''(t)+\frac{2}{\tau}\varepsilon'(t)+\frac{2}{\tau^2}\varepsilon(t)=\varphi(t),\ \varepsilon(0)=0,\ \varepsilon'(0)=0, \tag{16}$$

де $\varphi(t)=\frac{2}{\tau^2}[x(t)-x(t-\tau)-\tau x'(t-\tau)]-x''(t-\tau)$. Якщо $x''(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою K_2, то $|\varphi(t)|\le K_2\tau$. Для розв'язку задачі (16) маємо зображення

$$\varepsilon(t)=\int\limits_0^t \tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds, \tag{17}$$

$$\varepsilon'(t)=-\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds+\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\cos\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds. \tag{18}$$

Враховуючи оцінку для $\varphi(t)$, із (17) та (18) одержуємо

$$|\varepsilon(t)|\le K_2\tau^3, \tag{19}$$

$$|\varepsilon'(t)|\le 2K_2\tau^2. \tag{20}$$

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь (11). Позначимо $y_j(t)=x(t-\frac{j\tau}{m})$ і оцінимо різниці $\varepsilon_j(t)=z_j(t)-y_j(t)$, $\varepsilon_j'(t)=z_j'(t)-y_j'(t)$. Виходячи із оцінок (19) та (20), маємо

$$|\varepsilon_1(t)|=|z_1(t)-y_1(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3,$$

$$|\varepsilon_1'(t)|=|z_1'(t)-y_1'(t)|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2.$$

Оскільки $z_1(t)=y_1(t)+\varepsilon_1(t)$, то представимо $z_2=z_2^1+z_2^2$, де z_2^1 і z_2^2 є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2(z_2^1(t))''+\frac{\tau}{m}(z_2^1(t))'+z_2^1(t)=y_1(t),\ z_2^1(0)=y_2(0),\ (z_2^1(0))'=y_2'(0); \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2(z_2^2(t))''+\frac{\tau}{m}(z_2^2(t))'+z_2^2(t)=\varepsilon_1(t),\ z_2^2(0)=0,\ (z_2^2(0))'=0. \tag{22}$$

В цьому випадку одержуємо

$$|\varepsilon_2(t)|=|z_2(t)-y_2(t)|\le|z_2^1(t)-y_2(t)|+|z_2^2(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3+|z_2^2(t)|,$$

$$|\varepsilon_2'(t)|=|z_2'(t)-y_2'(t)|\le|(z_2^1(t))'-y_2'(t)|+|(z_2^2(t))'|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2+|(z_2^2(t))'|.$$

Для розв'язку задачі (22) маємо явне зображення $z_2^2(t)=\int\limits_0^t\frac{\tau}{m}e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds$.

Тоді

$$|z_2^2(t)| = \Big|\int_0^t \frac{\tau}{m} e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} \sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds\Big| \le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 \int_0^t \frac{\tau}{m} e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} ds \le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 \frac{\tau^2}{m^2},$$

$$|(z_2^2(t))'| = \Big| -\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} \sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds + \int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} \cos\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds\Big|$$

$$\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 \int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} ds \le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^4.$$

Отже, маємо

$$|\varepsilon_2(t)| \le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 + K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\frac{\tau^2}{m^2} = K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}\Big),$$

$$|\varepsilon_2'(t)| \le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 + 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^4 = 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}\Big).$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо при $m > 2\tau$

$$|\varepsilon_j(t)| \le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}+\frac{\tau^4}{m^4}+\ldots+\frac{\tau^{2(j-1)}}{m^{2(j-1)}}\Big) \le$$

$$K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2j}}+\ldots\Big) = \frac{4}{3}K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3, \quad j=\overline{1,m}, \tag{23}$$

$$|\varepsilon_j'(t)| \le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}+\frac{\tau^4}{m^4}+\ldots+\frac{\tau^{2(j-1)}}{m^{2(j-1)}}\Big) \le$$

$$2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2j}}+\ldots\Big) = \frac{8}{3}K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2, \quad j=\overline{1,m}. \tag{24}$$

Звідси випливає, що $z_j(t) \to x(t-\frac{j\tau}{m})$ і $z_j'(t) \to x'(t-\frac{j\tau}{m})$, $j=\overline{1,m}$, рівномірно на $[0,T]$ при $m\to\infty$. Послабимо тепер умови на $x(t)$. Припустимо, що $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою K_1 і $|x'(t)| < M_1$ при $t\in[-\tau,T]$. Продовжимо функцію $x(t)$ на інтервал $[-\tau, T+h]$, $h>0$, поклавши $x(t)=0$ при $t\notin[-\tau,T]$. Розглянемо згладжену функцію

$$x_1(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(s)ds, \quad t\in[-\tau,T],$$

друга похідна якої задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\frac{2K_1}{h}$.

Оцінимо функцію $x_2(t) = x(t) - x_1(t)$ і її похідну

$$|x_2(t)| = \Big|x(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(s)ds\Big| = \Big|x(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h}[x(t)+x'(\theta s)(s-t)]ds\Big| \le \frac{M_1 h}{2}, \tag{25}$$

$$|x_2'(t)| = \Big|x'(t) - \frac{1}{h}(x(t+h) - x(t))\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}(x'(t) - x'(s))ds\Big| \le \Big|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} K_1(t-s)ds\Big| = \frac{K_1 h}{2}. \tag{26}$$

Розглянемо тепер задачу (15), де $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Покладемо $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, $z_1(t)$ і $z_2(t)$ — розв'язки таких задач

$$\frac{\tau^2}{2}z_1''(t) + \tau z_1'(t) + z_1(t) = x_1(t),\ z_1(0) = x_1(-\tau),\ z_1'(0) = x_1'(-\tau); \tag{27}$$

$$\frac{\tau^2}{2}z_2''(t) + \tau z_2'(t) + z_2(t) = x_2(t),\ z_2(0) = x_2(-\tau),\ z_2'(0) = x_2'(-\tau). \tag{28}$$

Оцінимо різниці $z(t) - x(t-\tau)$ і $z'(t) - x'(t-\tau)$. Маємо

$$|z(t) - x(t-\tau)| = |z_1(t) + z_2(t) - x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| \le |z_1(t) - x_1(t-\tau)| + |z_2(t)| + |x_2(t-\tau)|.$$

Тоді $|z'(t) - x'(t-\tau)| \le |z_1'(t) - x_1'(t-\tau)| + |z_2'(t)| + |x_2'(t-\tau)|$. Оскільки друга похідна функції $x_1(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою $\frac{2K_1}{h}$, то, згідно (19) та (20),

$$|z_1(t) - x_1(t-\tau)| \le \frac{2K_1}{h}\tau^3, \tag{29}$$

$$|z_1'(t) - x_1'(t-\tau)| \le \frac{4K_1}{h}\tau^2. \tag{30}$$

Для $x_2(t-\tau)$ та $x_2'(t-\tau)$ справедливі оцінки (25),(26), тому

$$|x_2(t-\tau)| \le \frac{M_1 h}{2},\quad |x_2'(t-\tau)| \le \frac{K_1 h}{2}.$$

Функція $z_2(t)$ є розв'язком задачі (28), тому мають місце рівності

$$z_2(t) = x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} + (\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau} + \int\limits_0^t \tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds.$$

$$z_2'(t) = -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} - \frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau} - \frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}$$

$$+\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} - \int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds + \int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\cos\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds.$$

Тоді маємо оцінки

$$|z_2(t)| \le \Big|x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\Big| + \Big|(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\Big| + \int\limits_0^t \Big|\tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)\Big|ds \le$$

$$\frac{M_1 h}{2} + \frac{\tau K_1 h}{2} + \frac{M_1 h}{2} + \tau^2\frac{M_1 h}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \le h\Big(M_1 + \frac{\tau K_1}{2} + \frac{M_1\tau^2}{2}\Big),$$

$$|z_2'(t)| \le \Big| -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\Big| + \Big| -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\Big| + \Big| -\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau)+$$

$$x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\Big| + \Big|\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau)+x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\Big| + \int\limits_0^t \Big|-e^{-\frac{t-s}{\tau}}\Big|\Big|\sin\frac{t-s}{\tau}\Big|\Big|x_2(s)\Big|ds+$$

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\Big|\cos\frac{t-s}{\tau}\Big|\Big|x_2(s)\Big|ds \le \frac{2M_1h}{\tau} + K_1h + M_1h\tau\Big(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\Big) \le h\Big(\frac{2M_1}{\tau}+K_1+M_1\tau\Big).$$

Отже,

$$|z(t)-x(t-\tau)| \le \frac{2K_1}{h}\tau^3 + h\Big(\frac{3}{2}M_1+\frac{\tau K_1}{2}+\frac{\tau^2M_1}{2}\Big),$$

$$|z'(t)-x'(t-\tau)| \le \frac{4K_1}{h}\tau^2 + h\Big(\frac{2M_1}{\tau}+\frac{3K_1}{2}+M_1\tau\Big).$$

Розглядаючи тепер систему рівнянь (11), де $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, і проводячи аналогічні оцінки, одержуємо

$$\Big|z_j(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})\Big| \le \frac{8K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 + h\Big(\frac{3}{2}M_1+\frac{\tau K_1}{2}+\frac{M_1\tau^2}{2}\Big) =$$

$$\frac{8K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 + hB_1, \quad B_1 = \Big(\frac{3}{2}M_1+\frac{\tau K_1}{2}+\frac{M_1\tau^2}{2}\Big). \tag{31}$$

$$\Big|z_j'(t)-x'\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\Big| \le \frac{32K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 + h\Big(\frac{2M_1}{\tau}+\frac{3K_1}{2}+M_1\tau\Big) =$$

$$\frac{32K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 + hB_2, \quad B_2 = \Big(\frac{2M_1}{\tau}+\frac{3K_1}{2}+M_1\tau\Big). \tag{32}$$

Покладемо в нерівностях (31),(32) $h=\frac{\tau}{m}$, маємо

$$\Big|z_j(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})\Big| \le \frac{1}{m}\Big(\frac{8K_1\tau^2}{3m}+\tau B_1\Big) \le \frac{A_1}{m},\ \ A_1 = \frac{8K_1\tau}{3}+\tau B_1,$$

$$\Big|z_j'(t)-x'(t-\frac{j\tau}{m})\Big| \le \frac{1}{m}\Big(\frac{32K_1\tau}{3}+\tau B_2\Big) = \frac{A_2}{m},\ \ A_2 = \frac{32K_1\tau}{3}+\tau B_2.$$

Лема 3.1 доведена. □

4 Обгрунтування схеми апроксимації

Теорема 1. *Нехай $z_j(t),\ j=\overline{0,m}$ — розв'язок задачі Коші (5)–(6), а $x(t)$ — розв'язок початкової задачі (1)–(2) і справджуються умови (3),(4),(7). Тоді розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2), і мають місце співвідношення*

$$\Big|x\Big(t-\frac{\tau j}{m}\Big)-z_j(t)\Big| \le \frac{B_1}{m},\ j=\overline{0,m},\ t\in[0,T], \tag{33}$$

$$\Big|x'\Big(t-\frac{\tau j}{m}\Big)-z_j'(t)\Big| \le \frac{B_2}{m},\ j=\overline{0,m},\ t\in[0,T], \tag{34}$$

де $B_1, B_2 > 0$ — сталі, що не залежать від j та m.

Доведення. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (5) з початковими умовами (6). Нехай

$$N_j(t) = \max_{0\le s\le t}\left|x\Big(s-\frac{\tau j}{m}\Big)-z_j(s)\right|,\ j=\overline{0,m},\ t\in[0,T]. \tag{35}$$

$$M_j(t) = \max_{0\le s\le t}\left|x'\Big(s-\frac{\tau j}{m}\Big)-z'_j(s)\right|,\ j=\overline{0,m},\ t\in[0,T]. \tag{36}$$

Представимо $z_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ у вигляді суми $z_j(t)=z_j^{(1)}(t)+z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(1)}+\frac{\tau}{m}z_1^{'(1)}+z_1^{(1)}=x(t),\\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_j^{''(1)}+\frac{\tau}{m}z_j^{'(1)}+z_j^{(1)}=z_{j-1}^{(1)}(t), j=\overline{2,m},\\ z_j^{(1)}(0)=x(-\frac{j\tau}{m}),\ z_j^{'(1)}(0)=x'(-\frac{j\tau}{m}), j=\overline{1,m}; \end{array} \tag{37}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(2)}+\frac{\tau}{m}z_1^{'(2)}+z_1^{(2)}=z_0(t)-x(t),\\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_j^{''(2)}+\frac{\tau}{m}z_j^{'(2)}+z_j^{(2)}=z_{j-1}^{(2)}(t), j=\overline{2,m},\\ z_j^{(2)}(0)=0,\ z_j^{'(2)}(0)=0, j=\overline{1,m}. \end{array} \tag{38}$$

Оцінимо різниці $|z_j(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})|$ та $|z'_j(t)-x'(t-\frac{j\tau}{m})|$. Враховуючи вигляд систем (37),(38), маємо

$$\left|z_j(t)-x\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\right| = \left|z_j^{(1)}(t)+z_j^{(2)}(t)-x\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \left|z_j^{(1)}(t)-x\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\right| + |z_j^{(2)}(t)|,$$

$$\left|z'_j(t)-x'\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \left|z'^{(1)}_j(t)-x'\Big(t-\frac{j\tau}{m}\Big)\right| + |z'^{(2)}_j(t)|.$$

Покажемо методом математичної індукції, що для доданків $|z_j^{(2)}(t)|$ та $|z'^{(2)}_j(t)|$ справедливі оцінки

$$|z_j^{(2)}(t)|\le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T], \tag{39}$$

$$|z'^{(2)}_j(t)|\le 2N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{40}$$

Для розв'язку рівняння $\frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(2)}+\frac{\tau}{m}z_1^{'(2)}+z_1^{(2)}=z_0(t)-x(t)$, з початковими умовами $z_1^{(2)}(0)=0,\ z_1^{'(2)}(0)=0$, $z_1^{(2)}(t)$ має вигляд

$$z_1^{(2)}(t)=\frac{\tau}{m}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\Big(\frac{m}{\tau}(t-s)\Big)[z_0(s)-x(s)]ds.$$

Тоді при $m>\tau$

$$|z_1^{(2)}(t)|\le\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 N_0(t)\le N_0(t),$$

$$|z'^{(2)}_1(t)|\le\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 2N_0(t)\le 2N_0(t).$$

Припустимо, що нерівності (39),(40) справджуується при $k=j$, а саме $|z_j^{(2)}(t)|\le N_0(t)$, $|z'^{(2)}_j(t)|\le 2N_0(t)$. Покажемо, що вони будуть справедливі при $k=j+1$:

$$|z_{j+1}^{(2)}(t)|=\frac{\tau}{m}\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}\left|\sin\frac{m(t-s)}{\tau}\right||z_j^{(2)}(s)|ds\le\frac{\tau}{m}N_0(t)\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}ds\le N_0(t),$$

$$|z'^{(2)}_{j+1}(t)| = 2\frac{\tau}{m}\int\limits_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}|z_j^{(2)}(s)|ds \le 2\frac{\tau}{m}N_0(t)\int\limits_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}ds \le 2N_0(t).$$

Отже, нерівністі (39),(40) мають місце.

Для системи (37) виконуються умови леми 3.1, тому

$$\Big|z_j^{(1)}(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\Big| \le \frac{A_1}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T],\ A_1>0,$$

$$\Big|z'^{(1)}_j(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\Big| \le \frac{A_2}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T],\ A_2>0.$$

Отже,

$$\Big|z_j(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\Big| \le \frac{A_1}{m} + N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T], \tag{41}$$

$$\Big|z'_j(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\Big| \le \frac{A_2}{m} + 2N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{42}$$

Нерівності (41),(42) справджується для всіх $t\in[0,T]$. Тому, враховуючи позначення (35),(36), маємо

$$N_j(t) \le N_0(t) + \frac{A_1}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T], \tag{43}$$

$$M_j(t) \le 2N_0(t) + \frac{A_2}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{44}$$

Оцінимо тепер різниці $|x(t)-z_0(t)|$ та $|x'(t)-z_0'(t)|$. Записуючи рівняння (1) і (5) у інтегральному вигляді та враховуючи властивості функції $f(t,u_0,u_1,u'_1)$, одержуємо

$$|x(t)-z_0(t)| \le \int\limits_0^t |f(s,x(s),x(s-\tau),x'(s-\tau)) - f(s,z_0(s),z_m(s),z'_m(s))|ds \le$$

$$L\int\limits_0^t (4N_0(s) + \frac{1}{m}(A_1+A_2))ds \le 4L\int\limits_0^t N_0(s)ds + \frac{L}{m}(A_1+A_2)T. \tag{45}$$

Нерівність (45) справджується для всіх $t\in[0,T]$, тому, враховуючи позначення (35), маємо

$$N_0(t) \le 4L\int\limits_0^t N_0(s)ds + \frac{L}{m}(A_1+A_2)T.$$

Застосовуючи нерівність Гроноулла-Белмана [11], отримаємо

$$N_0(t) \le \frac{L}{m}(A_1+A_2)Te^{4LT}.$$

Тепер із нерівностей (43),(44) маємо

$$N_j(t) \le \frac{L}{m}(A_1+A_2)Te^{4LT} + \frac{A_1}{m} \le \frac{B_1}{m},\ t\in[0,T],\ j=\overline{1,m},$$

де $B_1 = L(A_1+A_2)Te^{4LT} + A_1$,

$$M_j(t) \le \frac{2L}{m}(A_1+A_2)Te^{4LT} + \frac{A_2}{m} \le \frac{B_2}{m},\ t\in[0,T],\ j=\overline{1,m},$$

де $B_2 = 2L(A_1+A_2)Te^{4LT} + A_2$.

Теорема доведена. □

5 Приклад

Розглянемо початкову задачу

$$\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 2x(t-1) + x'(t-1), \ t \in [0,1], \\ x(t) = 2t + \frac{2}{3}, \ t \in [-1,0], \\ x'(t) = 2, \ t \in [-1,0]. \end{array} \quad (46)$$

Точний розв'язок задачі (46), знаходимо методом кроків на [0,1]

$$x_m(t) = 4e^t - 4t - \frac{10}{3}, x'_m(t) = 4e^t - 4.$$

Наближений розв'язок $x_н$ задачі (46), знайдений як розв'язок апроксимуючої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (5). Для числового інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь використовуємо різницеву схему Гіра першого порядку. Результати числових експериментів при різних m наведено в таблицях 1, 2.

Таблиця 1

t	x_m	$x_н(m=8)$	$\triangle_1$	$x_н(m=13)$	$\triangle_2$
0,000000	0,666667	0,666667	0,000000	0,666667	0,000000
0,200000	0,752278	0,752253	-0,000024	0,752253	-0,000024
0,400000	1,033965	1,033903	-0,000063	1,033906	-0,000060
0,600000	1,555142	1,554397	-0,000745	1,554990	-0,000152
0,800000	2,368830	2,353762	-0,015068	2,363890	-0,004941

Таблиця 2

t	x'_m	$x'_н(m=8)$	$\triangle_1$	$x_н(m=13)$	$\triangle_2$
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,200000	0,885611	0,885587	-0,000024	0,885587	-0,000024
0,400000	1,967299	1,967124	-0,000175	1,967239	-0,000060
0,600000	3,288475	3,275736	-0,012739	3,287066	-0,001409
0,800000	4,902164	4,717788	-0,184276	4,816214	-0,085950

Література

1. Красовський Н.Н. *Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием* // ПММ. — 1964. — Т.28, №4. – С. 716–725.

2. Матвій О.В., Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість* // Нелінійні коливання. — 2004. — Т.7, №2. — С. 208–216.

3. Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. — 2007. — Т.10, №3. — С. 329–335.

4. Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь і моделювання процесів електродинаміки* // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. наук. – 1998. – № 2. – С. 111–118.

5. Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Апроксимація систем диференціально- різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. – 1999. – N1. – С.42–50.

6. Репин Ю.М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями* // ПММ. – 1965. – Т.29, №2. – С.226–245.

7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1984. – 421 с.

9. Черевко І.М. *Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів* // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – К. :Ін-т математики АН України. – 1992. – С. 74-84.

10. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

11. Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials*, Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations, **28**, 1 (1999), 15-21.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 01.02.2011

Pernay S.A., Cherevko I.M. *Approximation scheme of higher accuracy of differential equations of neutral type*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 112–123.

The properties of solution of initial problem for differential-difference equation of neutral type were researched. An approximate estimate of element delay was specified by scheme of higher accuracy. The approximate scheme of higher accuracy of neutral equation by a sequence of ordinary differential equations system was constructed and analyzed.

Пернай С.А., Черевко И.М. *Схема аппроксимации повышенной точности дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 112–123.

Исследованы свойства решения начальной задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа. Уточнена оценка приближения элемента запаздывания схемой повышенной точности, с помощью которой построена и обоснована схема аппроксимации повышенной точности уравнения нейтрального типа последовательностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений.