ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 89–93 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.89–93
doi:10.15330/cmp.5.1.89-93

Мироник В.І., Михайлюк В.В.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У КЛАСІ НАРІЗНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлюється загальний вигляд розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку у класі нарізно диференційовних функцій.

Ключові слова і фрази: нарізно диференційовні функції, диференціальні рівняння з частинними похідними.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: vadmyron@gmail.com (Мироник В.І.), vmykhaylyuk@ukr.net (Михайлюк В.В.)

Вступ

Розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог, тобто розв'язування того чи іншого диференціального рівняння в класі функцій, які задовольняють строго необхідні умови для існування виразів, що входять у дане рівняння, беруть свій початок з класичної праці Р.Бера [2]. В ній було показано, що кожний неперервний за сукупністю змінних нарізно диференційовний, тобто диференційовний відносно кожної змінної зокрема, розв'язок $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

має вигляд $f(x, y) = \varphi(x - y)$. У зв'язку з цим Р.Бер в [2] поставив питання про те, чи зберігається вигляд розв'язків рівняння (1) у класі нарізно диференційовних функцій. Результат Р.Бера, як і його питання, були пізніше продубльовані в [4].

Подальші вивчення розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог були проороблені в роботах [5, 6, 1, 3, 7]. Зокрема, в [7] було розвинуто метод Р.Бера, застосований в [2], і встановлено, що його питання має позитивну відповідь. Фактично в [7, теорема 4.3, наслідок 4.4] був доведений наступний результат, який там сформульований для функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ — така нарізно диференційовна функція, що $f'_x(p) + kf'_y(p) = 0$ для кожного $p \in (a, b) \times (c, d)$. Тоді існує визначена на відповідному інтервалі диференційовна функція φ така, що $f(x, y) = \varphi(kx - y)$ для довільного $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$.*

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 35A99.

У зв'язку з цим природно виникає питання про вигляд розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у класі нарізно диференційовних функцій. У даній статті ми досліджуємо розв'язки деяких типів таких рівнянь і встановлюємо, що вигляд таких розв'язків є аналогічним до вигляду розв'язків класичних рівнянь першого порядку.

1 Випадок додатних коефіцієнтів

Спочатку з допомогою стандартних міркувань доведемо узагальнення теореми 1 на випадок строго додатних коефіцієнтів.

Теорема 2. *Нехай $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ і $\beta : (c,d) \to \mathbb{R}$ — строго додатні функції, які мають первісні $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ і $v : (c,d) \to \mathbb{R}$ відповідно, і $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ — така нарізно диференційовна функція, що*

$$\beta(y)f'_x(x,y) + \alpha(x)f'_y(x,y) = 0 \tag{2}$$

для всіх $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$. Тоді існує така диференційовна функція φ, що

$$f(x,y) = \varphi(u(x) - v(y))$$

для всіх $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$.

Доведення. Розглянемо функції $s = u(x)$ і $t = v(y)$. Оскільки $u'(x) = \alpha(x) > 0$ і $v'(y) = \beta(y) > 0$, то функції u і v строго зростають. Тому існують обернені функції $x = x(s) = u^{-1}(s)$ і $y = y(t) = v^{-1}(t)$, причому ці функції є диференційовними і $x'(s) = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{\alpha(x)}$ та $y'(t) = \frac{1}{v'(y)} = \frac{1}{\beta(y)}$.

Позначимо $(a_1,b_1) = \{u(x) : x \in (a,b)\}$ і $(c_1,d_1) = \{v(y) : y \in (c,d)\}$. Тепер розглянемо функцію $g : (a_1,b_1) \times (c_1,d_1) \to \mathbb{R}, g(s,t) = f(x(s),y(t))$. Оскільки f нарізно диференційовна, то

$$g'_s(s,t) = f'_x(x(s),y(t)) \cdot x'(s) = f'_x(x(s),y(t)) \cdot \frac{1}{\alpha(x(s))},$$

і

$$g'_t(s,t) = f'_y(x(s),y(t)) \cdot \frac{1}{\beta(y(t))}.$$

Отже, функція g нарізно диференційовна і, врахувавши, що f задовольняє (2), одержимо

$$g'_s(s,t) + g'_t(s,t) = 0.$$

Тому, згідно з теоремою 1, існує така диференційовна функція φ, що $g(s,t) = \varphi(s-t)$. Отже,

$$f(x,y) = g(u(x),v(y)) = \varphi(u(x) - v(y)).$$

□

2 Основний результат

Твердження 2.1. *Нехай $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна відносно першої змінної функція, $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервні функції і $x_0 \in (a,b)$. При цьому, ці функції задовольняють умови $f(x,y) = \varphi_1(u(x) - y)$ для довільних $x \in (a, x_0)$, $y \in \mathbb{R}$ і $f(x,y) = \varphi_2(u(x) - y)$ для довільних $x \in (x_0, b)$, $y \in \mathbb{R}$. Тоді $\varphi_1 = \varphi_2$ і $f(x,y) = \varphi_1(u(x) - y)$ для довільних $x \in (a,b)$ і $y \in \mathbb{R}$.*

Доведення. $f(x_0,y) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \varphi_1(u(x)-y) = \varphi_1(u(x_0)-y)$. З іншого боку, $f(x_0,y) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0+0} \varphi_2(u(x)-y) = \varphi_2(u(x_0)-y)$.

Отже, $\varphi_1(u(x_0)-y) = \varphi_2(u(x_0)-y)$ для всіх $y \in \mathbb{R}$, звідки отримуємо потрібне. □

Теорема 3. *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція, яка задовольняє наступні умови:*

1) *$\alpha^{-1}(0)$ — замкнена, не більш ніж зліченна множина;*
2) *якщо $\alpha(x) \neq 0$ на інтервалі $I \subseteq \mathbb{R}$, то α зберігає знак на I;*
3) *α має первісну функцію $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;*

і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така нарізно диференційовна функція, що

$$f'_x(x,y) + \alpha(x) f'_y(x,y) = 0 \tag{3}$$

для будь-яких $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді існує така диференційовна функція φ, що $f(x,y) = \varphi(u(x)-y)$.

Доведення. Позначимо $F = \alpha^{-1}(0)$. Тоді $\mathbb{R} \setminus F = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n$, де $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність інтервалів числової прямої. Позначимо через $\mathfrak{I}$ сукупність усіх таких інтервалів $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, що для будь-якого $I \in \mathfrak{I}$ існує така диференційовна функція $\varphi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $f(x,y) = \varphi_I(u(x)-y)$ для всіх $x \in I$ та $y \in \mathbb{R}$. З теореми 2 і умови 2) випливає, що $W_n \in \mathfrak{I}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що сукупність $\mathfrak{I}$ задовольняє такі умови:

(а) $\varphi_I = \varphi_J$ для довільних $I, J \in \mathfrak{I}$ з $I \cap J \neq \varnothing$, причому $I \cup J \in \mathfrak{I}$;

(б) якщо $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}$ така, що $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{J}} I \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I \in \mathfrak{I}$;

(в) для кожного $I \in \mathfrak{I}$ існує такий максимальний в $\mathfrak{I}$ інтервал J, що $I \subseteq J$;

(г) якщо I_1 і I_2 — максимальні і різні, то $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Доведемо ці властивості.

(а) Нехай $x \in I \cap J$. Тоді $f(x,y) = \varphi_I(u(x)-y) = \varphi_J(u(x)-y)$ для всіх $y \in \mathbb{R}$. Отже, $\varphi_I = \varphi_J$. Крім того, $f(x,y) = \varphi_I(u(x)-y)$ для довільних $x \in I \cup J$ і $y \in \mathbb{R}$. Тому $I \cup J \in \mathfrak{I}$.

(б) Нехай $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}$. Тоді з (а) випливає, що $\varphi_{I_1} = \varphi_{I_2}$. Якщо позначити $I_0 = \bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I$ і $\varphi_{I_0} = \varphi_I$, де I — деякий фіксований інтервал з $\mathfrak{J}$, то одержимо $f(x,y) = \varphi_{I_0}(u(x)-y)$ для довільного $x \in I_0$ і $y \in \mathbb{R}$. Отже, $I_0 \in \mathfrak{I}$.

(в) Зафіксуємо деякий інтервал $I_0 \in \mathfrak{I}$. Розглянемо систему інтервалів $\mathfrak{J} = \{I \in \mathfrak{I} : I_0 \subseteq I\}$. Зрозуміло, що $J = \bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I$ — інтервал. Крім того, з умови (б) випливає, що $J \in \mathfrak{I}$.

Покажемо, що J — максимальний в $\mathfrak{I}$. Припустимо, що існує $J_1 \in \mathfrak{I}$ такий, що $J_1 \supseteq J$. Тоді $I_0 \subseteq J \subseteq J_1$, тому $J_1 \in \mathfrak{I}$. Крім того, $J_1 \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathfrak{I}} I = J$, а значить $J_1 = J$.

(г) Припустимо, що I_1 та I_2 максимальні в $\mathfrak{I}$ і $I_1 \bigcap I_2 \neq \varnothing$. Тоді $I = I_1 \bigcup I_2 \in \mathfrak{I}$. З максимальності I_1 та I_2 випливає, що $I_1 = I_2$.

З умов (в) та (г) випливає, що множину $G = \bigcup\limits_{I \in \mathfrak{I}} I$ можна подати у вигляді $G = \bigsqcup\limits_{n \in N} I_n$, де $N \subseteq \mathbb{N}$ і всі інтервали I_n — максимальні в $\mathfrak{I}$. Оскільки $W_n \subseteq G$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $F_1 = \mathbb{R} \setminus G \subseteq \mathbb{R} \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n) = F$. Зрозуміло, що F_1 — замкнена, не більш ніж зліченна множина. Припустимо, що $F_1 \neq \varnothing$. Тоді множина F_1 має ізольовану точку x_0.

Виберемо інтервали $U = (a, x_0)$, $V = (x_0, b) \in \{I_n : n \in N\}$. Тоді $I = (a, b) \in \mathfrak{I}$ згідно з твердженням 2.1, що суперечить максимальності U та V. Отже, $F_1 = \varnothing$, тобто $G = \mathbb{R}$. Це означає, що $\mathbb{R} \in \mathfrak{I}$. Залишилось покласти $\varphi = \varphi_{\mathbb{R}}$. □

Зауваження 2.1. *Аналогічно доводиться теорема 3 для функції $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

3 Приклади, питання

Наступний приклад показує, що немає аналогів твердження 2.1 і теореми 3 для функції $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$.

Твердження 3.1. *Нехай $\varphi_1, \varphi_2 : (-2,1) \to \mathbb{R}$ — такі різні нескінченно диференційовні функції, що $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для кожного $t \in (-1,1)$. Тоді функція $f : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(\cos x - y), & (x,y) \in (-\infty, 0) \times (0,1), \\ \varphi_2(\cos x - y), & (x,y) \in ([0, +\infty) \times (0,1). \end{cases}$$

задовольняє наступні умови:

1) *f нескінченно диференційовна;*
2) *$f'_x(p) + \sin x f'_y(p) = 0$ для кожного $p \in \mathbb{R} \times (0,1)$;*
3) *$f(x,y) \neq \varphi(\cos x - y)$ для довільної функції $\varphi : (-2,1) \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Умови 1) і 2) випливають з того, що

$$f(x,y) = \varphi_1(\cos x - y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in (-\infty, \frac{\pi}{2}) \times (0,1).$$

Виберемо точку $t \in (-2,-1)$ так, що $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$, і візьмемо $x_1 \in (-\infty, 0)$, $y_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (0, +\infty)$ і $y_2 \in (0,1)$ так, що $\cos\, x_1 - y_1 = \cos\, x_1 - y_1 = t$. Тоді

$$f(x_1, y_1) = \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t) = f(x_2, y_2),$$

що доводить 3). □

Зауваження 3.1. *Немає аналогу теореми 3 для рівнянь виду (2), де $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго додатна неперервна функція і $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 3) теореми 3. Достатньо розглянути рівняння*

$$\frac{1}{\pi(y^2+1)} f'_x(x,y) + \sin\, x f'_y(x,y) = 0$$

і його розв'язок $g(x,y) = f(x, \frac{\operatorname{arctg} y}{\pi} + \frac{1}{2})$, де f — функція з твердження 3.1.

У зв'язку з цим виникає таке питання.

Питання. *Нехай* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— (неперервна) функція, яка має первісну* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Чи обов'язково нарізно диференційовний розв'язок* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *рівняння* (3) *має вигляд* $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$*?*

References

[1] Banakh T., Mykhaylyuk V. *Separately twice differentiable functions and the equation of string oscillation.* Real Anal. Exch. 2012/2013, **38** (1), 133–156.

[2] Baire R. *Sur les fonctions de variables reelles.* Annali di mat. pura ed appl., ser. 3, 1899, 1–123.

[3] Bruckner A.M., Petruska G., Preiss O., Thomson B.S. *The equation* $u_x u_y = 0$ *factors.* Acta Math. Hung. 1991, **57** (3-4), 275–278.

[4] Chernoff P.R., Royden H.F. *The Equation* $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Am. Math. Mon. 1975, **82** (5), 530–531.

[5] Kalancha A.K., Maslyuchenko V.K. *Generalization of Bruckner-Petruska-Preiss-Thomson theorem* Mat. Stud. 1999, **11** (1), 48–52. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K. *A property of partial derivatives.* Ukr. Math. J. 1987, **39** (4), 529–531. (in Russian)

[7] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Solving of partial differential equations under minimal conditions.* J. Math. Phys., Anal., Geom. 2008, **4** (2), 252–266.

Надійшло 11.10.2012

Myronyk V.I., Mykhaylyuk V.V. *First-order linear partial differential equations in the class of separately differentiable functions*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 89–93.

It is obtained a general solution of first-order linear partial differential equations in the class of separately differentiable functions.

Key words and phrases: separately differentiable functions, partial differential equations.

Мироник В.И, Михайлюк В.В. *Линейные уравнения с частными производными первого порядка в классе раздельно дифференцируемых функций* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 89–93.

Устанавливается общий вид решений дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в классе раздельно дифференцируемых функций.

Ключевые слова и фразы: раздельно дифференцируемые функции, дифференциальные уравнения с частными производными.