ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 134–142 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.134–142
doi:10.15330/cmp.5.1.134-142

Холявка Я.М.

ПРО МІРУ АЛГЕБРАЇЧНОЇ НЕЗАЛЕЖНОСТІ МОДУЛЯ ТА ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ЯКОБІ

Доводиться оцінка міри алгебраїчної незалежності модуля та значень в різних алгебраїчних точках еліптичної функції Якобі.

Ключові слова і фрази: міра алгебраїчної незалежності, еліптична функція Якобі.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: ya_khol@franko.lviv.ua

Вступ

Нехай $\operatorname{sn}(z)$ — еліптична функція Якобі [3] , $\varkappa$ — еліптичний модуль $\operatorname{sn}(z)$, $\varkappa^2 \in (0,1)$.

В роботах [4, 8, 16, 21] доведено еліптичний аналог теореми Ліндемана [2] та отримано оцінку міри алгебраїчної незалежності значень в алгебраїчних точках еліптичних функцій Вейєрштрасса та Якобі з алгебраїчними інваріантами і модулем відповідно.

В цій роботі отримано оцінку міри алгебраїчної незалежності значень в алгебраїчних точках еліптичної функції Якобі $\operatorname{sn}(z)$ у випадку трансцендентного $\varkappa$.

Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — задані алгебраїчні числа, лінійно незалежні над $\mathbb{Q}$. Позначимо степінь трансцендентності $\mathbb{Q}(\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n))$ через k. Будемо вважати, що алгебраїчно незалежними є числа $\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_{k-1})$. Позначимо їх через $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

Теорема 1. *Для довільного многочлена $A \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, $A \not\equiv 0$, степінь якого не перевищує D і висота не перевищуює H, $\ln\ln H \geqslant c_1 D^k \ln(D+1)$, справджується*

$$|A(\beta_1, \ldots, \beta_k)| \geqslant H^{-c_2 D^k}, \tag{1}$$

де c_1, c_2 — додатні константи, залежні лише від $\varkappa$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Доводити цю теорему будемо методом Нестеренко, викладеному у [7]–[14].

У наступному пункті наведено допоміжні твердження, необхідні для доведення теореми 1. У пункті 2 доведено теорему 2, з якої випливає оцінка (1). Означення основних понять, пов'язаних з мірою алгебраїчної незалежності, сформульовані в [2, 15, 19].

УДК 511.3
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J82, 11J89.

1 Допоміжні твердження

Означення наступних понять, формулювання і доведення необхідних властивостей ідеалів можна знайти в [22], [7].

Позначимо через $\dim I$ проективну розмірність однорідного ідеалу I, через $\deg I$ та $H(I)$ — величини, аналогічні степеневі многочлена та його висоті, через $h(I)$ — висоту ідеалу, яка характеризує кількість зв'язків, накладених многочленами цього ідеалу. Для $\overline{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ покладемо $|\overline{\gamma}| = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant m} |\gamma_j|$.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbb{K}[\overline{x}]$ — кільце многочленів від змінних $x_0, \ldots, x_m$ над $\mathbb{K}$. Для кожного однорідного незмішаного ідеалу I, $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ і ненульової точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через $|I(\overline{\gamma})|$ позначимо величину, аналогічну величині многочлена в точці $\overline{\gamma}$.

Лема 1.1. *Нехай I — незмішаний простий ідеал кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim I \geqslant 0$, $I = I_1 \cap \cdots \cap I_s$ — нескоротний примарний розклад, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j — показник примарного ідеалу I_j. Нехай $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\overline{\gamma} \neq 0$, тоді*

1) $\sum_{j=1}^{s} k_j \deg \mathfrak{p}_j = \deg I$;

2) $\sum_{j=1}^{s} k_j \ln H(\mathfrak{p}_j) \leqslant \ln H(I) + m^2 \deg I$;

3) $\sum_{j=1}^{s} k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\overline{\gamma})| \leqslant \ln |I(\overline{\gamma})| + m^3 \deg I$.

Лему 1.1 доведено в [7, Твердження 1.2].

Позначимо через $H(P)$ висоту многочлена P, $H(P) = \max |a_i|$, де a_i — коефіцієнти многочлена P, $h(P)$ — логарифмічна висота P, $\|P\|_{\overline{\gamma}} = |P(\overline{\gamma})| \cdot H(P)^{-1} \cdot |\overline{\gamma}|^{-\deg P}$.

Для двох ненульових точок $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ і $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через

$$\|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| = \left(\max_{0 \leqslant i < j \leqslant m} |\overline{\gamma}_i \overline{\vartheta}_j - \overline{\gamma}_j \overline{\vartheta}_i| \right) |\overline{\gamma}|^{-1} |\overline{\vartheta}|^{-1}$$

позначимо відстань між $\overline{\gamma}$ и $\overline{\vartheta}$.

Лема 1.2. *Нехай $\mathfrak{p}$ — однорідний простий ідеал кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim \mathfrak{p} \geqslant 0$; Q — однорідний многочлен з $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $Q \notin \mathfrak{p}$. Якщо $r = 1 + \dim \mathfrak{p} \geqslant 2$, то існує однорідний незмішаний ідеал $J \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$, нулі якого співпадають з нулями ідеалу $(\mathfrak{p}, Q)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$ такий, що*

1) $\deg J \leqslant \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;

2) $\ln H(J) \leqslant \ln H(\mathfrak{p}) \deg Q + \ln H(Q) \deg \mathfrak{p} + m(r+1) \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;

3) для довільної точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ і $\rho = \min \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\|$, де мінімум береться по усіх нетривіальних нулях $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ ідеалу $\mathfrak{p}$, справджується нерівність

$$\ln |J(\overline{\gamma})| \leqslant \ln \delta + \ln H(Q) \deg \mathfrak{p} + \ln H(\mathfrak{p}) \deg Q + 11 m^2 \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q, \tag{2}$$

де

$$\delta = \begin{cases} \|Q\|_{\overline{\gamma}}, & \text{якщо } \rho < \|Q\|_{\overline{\gamma}}, \\ |\mathfrak{p}(\overline{\gamma})|, & \text{якщо } \rho \geqslant \|Q\|_{\overline{\gamma}}. \end{cases}$$

Нерівність (2) *справджується і при $r = 1$, якщо вважати у цьому випадку $|J(\overline{\gamma})| = 1$.*

Лему 1.2 доведено в [7, Твердження 1.4].

Лема 1.3. *Нехай $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ — однорідний незмішаний ідеал, $r = 1 + \dim I \geqslant 1$. Для довільної ненульової точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ існує нуль $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ ідеалу I такий, що*

$$\deg I \cdot \ln \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| \leqslant \frac{1}{r}\left(\ln |I(\overline{\gamma})| + h(I)\right) + 4m^3 \deg I.$$

Лему 1.3 доведено в [7, Твердження 1.5].

Лема 1.4. *Якщо Q — однорідний многочлен кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$ і $\overline{\gamma}, \overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ — ненульові точки, причому $Q(\overline{\vartheta}) = 0$, то справджується нерівність*

$$\|Q\|_{\overline{\gamma}} \leqslant \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| \cdot e^{(2m-1)\deg Q}.$$

Лему 1.4 доведено в [7].

Дотримуватимемось стандартних позначень в теорії еліптичних функцій [3]. Позначимо через $4K$ і $2iK'$ основні періоди $\mathrm{sn}(z)$. Покладемо

$$\overline{\omega} = (\omega_0, \ldots, \omega_m), \omega_0 = 1, \omega_1 = \varkappa^2, \omega_{2j} = \mathrm{sn}(\alpha_j), \omega_{2j+1} = \mathrm{sn}'(\alpha_j), 1 \leqslant j \leqslant n; m = 2n+1.$$

Лема 1.5. *Для довільного вектора $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\overline{l} \neq 0$, існують однорідні многочлени $S_{\overline{l}}$, $T_{\overline{l}}$, $U_{\overline{l}} \in \mathbb{Z}[\overline{x}]$, для яких*

1) *степінь не перевищує $c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2)$;*

2) *висота не перевищує $\exp(c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2))$;*

3) $\mathrm{sn}(l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n) = T_{\overline{l}}(\overline{\omega})/U_{\overline{l}}(\overline{\omega})$, $\quad \mathrm{sn}'(l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n) = S_{\overline{l}}(\overline{\omega})/U_{\overline{l}}(\overline{\omega})$.

Крім того,

$$|U_{\overline{l}}(\overline{\omega})| \geqslant \exp(-c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2)).$$

Доведення Леми 1.5 подібне доведенню Леми 7.2 з [1] і Леми 1 з [6].

Нехай Λ — решітка в $\mathbb{C}$ і $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$. Число α назвемо $\mathfrak{M}$-допустимим відносно Λ, якщо α конгруентне за модулем Λ деякій точці множини $\mathfrak{M}$.

Лема 1.6. *Нехай $z_1, \ldots, z_n$ — комплексні числа, лінійно незалежні над $\mathbb{Q}$ за модулем решітки Λ. Існують така компактна множина $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$, яка не містить точок Λ, і таке число L_0, що для довільного дійсного числа L_1, $L_1 \geqslant L_0$, серед точок $l_1z_1 + \cdots + l_nz_n$, $0 \leqslant l_j < L_1$, $l_j \in \mathbb{Z}$, знайдеться не менше $\frac{7}{8}L_1^n$ $\mathfrak{M}$-допустимих. Множина $\mathfrak{M}$ і число L_0 залежить лише від Λ і $z_1, \ldots, z_n$.*

Лему 1.6 доведено в [17, Лема 5]. Будемо її застосовувати, коли $z_1 = \alpha_1, \ldots, z_n = \alpha_n$ і Λ є решіткою півперіодів $\mathrm{sn}(z)$, а множина $\mathfrak{M}$ визначається цими числами і решіткою.

Лема 1.7. *Функції*

$$\sigma((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3}), \quad \sigma((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})\,\mathrm{sn}(z)$$

цілі і для $M_0 > 1$ виконуються нерівності

$$|\sigma((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})\,\mathrm{sn}(z)|_{|z| \leqslant M_0} \leqslant c_4^{M_0^2},$$

$$|\sigma((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})|_{|z| \leqslant M_0} \leqslant c_4^{M_0^2}.$$

Якщо δ — відстань від z_0 до найближчого полюсу $\mathrm{sn}(z)$ і $|z_0| \leqslant M_0$, тоді виконується $|\sigma((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})| \geqslant \delta c_5^{-M_0^2}$, де c_4, c_5 — сталі, що залежать лише від $\varkappa$.

Доведення Леми 1.7 аналогічне доведенню Леми 7.1 з [5].

Лема 1.8. *Нехай $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ аналітична в крузі $|z| \leqslant R_2$, E — множина з $\mathcal{D}^2$ точок, які належать кругу $|z| \leqslant R_1$, відстань між якими для кожної пари точок не менше ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді*

$$|f(z)|_{|z|\leqslant R_1} \leqslant 2|f(z)|_{|z|\leqslant R_2} \left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1} \left(\frac{33R_1}{\varepsilon\mathcal{D}}\right)^{\mathcal{D}^2 S} \max_{x\in E, 0\leqslant s\leqslant S} \left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|. \tag{3}$$

Лему 1.8 доведено в [18].

2 Доведення Теореми 1

У цьому розділі доведемо Теорему 2 і покажемо, як з неї можна отримати Теорему 1.

Теорема 2. *Для кожного цілого r, $1 \leqslant r \leqslant k$, існують такі сталі $\mu_r \geqslant 0$, $\gamma_r \geqslant 1$, що для довільних D і H, $\ln\ln H \geqslant \gamma_r D^k \ln(D+1)$ і для довільного однорідного незмішаного ідеалу $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ з умовами $h(I) = m - r + 1$, $\deg I \leqslant D^{k-r+1}$, $\ln H(I) \leqslant D^{k-r} \ln H$ справджується*

$$\ln |I(\overline{\omega})| \geqslant -\mu_r (D \ln H(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Покажемо як з Теореми 2 випливає Теорема 1.

Для довільного ненульового многочлена $B \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}]$ позначимо

$$C(x_0, x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}) = x_0^{\deg B} B\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_4}{x_0}, \ldots, \frac{x_{2n}}{x_0}\right).$$

Тоді

$$C(1, \varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n)) = B(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n)). \tag{4}$$

Існують многочлени R_{k+i}, $Q_j \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, $i = 0, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n$ такі, що $R_{k+i}(\varkappa, \mathrm{sn}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{sn}\,\alpha_{k-1}, \mathrm{sn}\,\alpha_{k+i}) = 0$ і $Q_j(\varkappa, \mathrm{sn}\,\alpha_j, \mathrm{sn}'\,\alpha_j) = 0$. Ідеал $\mathfrak{J}$, породжений однорідними многочленами, що відповідають R_{k+i} і Q_j, має розмірність $k+1$. Позначимо через $\mathfrak{p}$ однорідний простий ідеал, породжений усіма однорідними многочленами кільця $\mathbb{Z}[\overline{x}]$, які рівні нулю в точці $\overline{\omega}$. Тоді отримаємо $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$, тому $h(\mathfrak{p}) \geqslant 2n - k + 1$. Але якщо $r = m + 1 - h(\mathfrak{p}) \leqslant k$, то для таких r з Теореми 2 отримаємо $|\mathfrak{p}(\omega)| > 0$, що суперечить вибору $\mathfrak{p}$. Отже, $m + 1 - h(\mathfrak{p}) > k$, тобто $h(\mathfrak{p}) < m - k + 1$, тому $h(\mathfrak{p}) = 2n - k + 1$.

Нехай J — однорідний незмішаний ідеал в кільці $\mathbb{Z}[\overline{x}]$, побудований для ідеалу $\mathfrak{p}$ і многочлена C згідно Леми 1.2. Тоді

$$\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1, \quad \deg J \leqslant c_6 \deg C, \quad \ln H(J) \leqslant c_7\big(\ln H(C) + \deg C\big),$$

$$\ln |J(\overline{\omega})| \leqslant \ln \|C\|_{\overline{\omega}} + c_8\big(\ln H(C) + \deg C\big). \tag{5}$$

Застосувавши до ідеалу J Теорему 2 і враховуючи (4), з (5) отримаємо нерівність

$$\ln |B(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n))| \geqslant -c_9 (D \ln H(I) + \deg I \ln H) D^{k-1}. \tag{6}$$

Числа $\beta_1, \ldots, \beta_k$ алгебраїчні над полем $\mathbb{Q}(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n))$. Тоді для деякого цілого алгебраїчного над кільцем $\mathbb{Q}[\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n)]$ числа d усі числа $d\beta_i$ — цілі алгебраїчні над $\mathbb{Q}[\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n)]$.

Покладемо для многочлена $A \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$, $A \not\equiv 0$,

$$B(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \dots, \mathrm{sn}(\alpha_n)) = d^{\deg A} \|A\|_{(\beta_1, \dots, \beta_k)}. \tag{7}$$

Так як $\deg B \leqslant c_{10} \deg A$, $\ln H(B) \leqslant c_{11} \ln H(A)$, то, враховуючи (6) і (7), отримаємо оцінку Теореми 1.

Доведемо Теорему 2 індукцією по r. Нехай r — найменше ціле число, $1 \leqslant r \leqslant k$, для якого твердження Теореми 2 не виконується. Для $r - 1$ Теорема 2 справджується, тому визначене γ_{r-1}. Виберемо достатньо велике число λ і покладемо $\gamma_r = \gamma_{r-1} \lambda^{8k^2+4k}$.

Лема 2.1. *Для достатньо великого λ множина чисел D таких, що існує простий однорідний ідеал $\mathfrak{p}$ кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$ з умовами*

$$\ln\ln H \geqslant \gamma_r D^k \ln(D+1), \quad \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0), \quad h(\mathfrak{p}) = m - r + 1, \quad \deg \mathfrak{p} \leqslant D^{1-r+k},$$

$$\ln H(\mathfrak{p}) \leqslant 2D^{k-r} \ln H, \quad \ln|\mathfrak{p}(\overline{\omega})| < -\lambda^{8k^2+8k+4} (D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}$$

обмежена.

З Леми 2.1 випливає теорема 2. Якщо ця множина обмежена, то для деякої достатньо великої додатної сталої c_{12}, для усіх однорідних простих ідеалів $\mathfrak{p} \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim \mathfrak{p} = r - 1$, буде справджуватись

$$\ln|\mathfrak{p}(\overline{\omega})| \geqslant -c_{12} (D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}. \tag{8}$$

Застосовуючи Лему 1.1 до довільного однорідного незмішаного ідеалу $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ розмірності $r - 1$ та враховуючи (8), отримаємо

$$\ln|I(\overline{\omega})| \geqslant -c_{13} (D \ln H(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Але це суперечить припущенню, що для ідеалів розмірності $r - 1$ Теорема 2 не виконується. Отримана суперечність доводить Теорему 2.

Нехай H — достатньо велике число D і простий однорідний ідеал $\mathfrak{p}$ розмірності $r - 1$ задовольняють умовам Леми 2.1. Визначимо число M рівністю

$$\lambda D^k M \ln M = \min\left\{\lambda^{8k^2+8k+4} (D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1},\ \frac{1}{2} \ln(1/\rho)\right\}, \tag{9}$$

де ρ визначене в Лемі 1.2. З Леми 1.3 і (9) отримаємо

$$M \ln M \geqslant \ln H (\ln\ln H)^{-1}. \tag{10}$$

З Леми 1.4 і (9) випливає

Лема 2.2. *Нехай однорідний многочлен $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ міститься в ідеалі $\mathfrak{p}$ і задовольняє нерівності*

$$h(P) + (2m+1) \deg P \leqslant \lambda D^k M \ln M.$$

Тоді

$$|P(\overline{\omega})| |\overline{\omega}|^{-\deg P} \leqslant \exp\left(-\lambda D^k M \ln M\right).$$

З Леми 1.5, Леми 2.2 і (10) отримаємо наступне твердження.

Лема 2.3. *Якщо* $\overline{l} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$, $|l_j| \leqslant \lambda^{4k+1} D^{1/2}$, *тоді* $U_{\overline{l}}(\overline{x}) \notin \mathfrak{p}$.

З Леми 1.2, Леми 2.1, (9), (10) та індуктивного припущення отримаємо оцінку знизу.

Лема 2.4. *Нехай однорідний многочлен* $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ *не лежить в ідеалі* $\mathfrak{p}$ *і задовольняє нерівності*

$$\deg P \leqslant \lambda^{8k+5} D, \quad \ln H(P) \leqslant \lambda^{8k+5} \ln H.$$

Тоді

$$|P(\overline{\omega})||\overline{\omega}|^{-\deg P} \geqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda D^k M \ln M\right).$$

Застосувавши Лему 2.4 до кожного базисного ідеалу, отримаємо наступне твердження.

Лема 2.5. *Якщо* $\mathfrak{I}$ *— ідеал* $\mathbb{K}[\overline{x}]$, *породжений усіма однорідними многочленами* $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ *такими, що* $P(\overline{\omega}) = 0$, *тоді* $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{p}$.

Визначимо

$$L = \left[\lambda^{4k} D^{1/2}\right], \quad K_0 = \left[D^k M\right], \quad K_1 = \lambda^2, \quad S = \left[\lambda^{1-8k^2} M\right]. \tag{11}$$

Лема 2.6. *Існують такі однорідні многочлени* $A_{\overline{k}} = A_{k_0,k_1}$, $A_{\overline{k}} \in \mathbb{K}[\overline{x}]$, $0 \leqslant k_0 < K_0$, $0 \leqslant k_1 < K_1$, *що виконуються умови*

1) $\deg A_{\overline{k}} \leqslant \lambda^{4n+4} D$, $\ln H(A_{\overline{k}}) \leqslant 4\lambda^{1-2n^2} M \ln M$;

2) *хоча б один з цих многочленів не лежить в* $\mathfrak{p}$;

3) *для*

$$F(z) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) z^{k_0} \operatorname{sn}^{k_1}(z)$$

для всіх цілих чисел s, $0 \leqslant s \leqslant S$, *в усіх* $\mathfrak{M}$*-допустимих точках* $l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant l_j < L$, *виконуються нерівності*

$$|F^{(s)}(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda D^k M \ln M\right). \tag{12}$$

Доведення Леми 2.6 подібне до доведення Леми 10 в [8]. Покладемо

$$F^{(s)}(z) = \left(\frac{d}{dw}\right)^s (F(z+w))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \left(\frac{d}{dw}\right)^{s-t} \left[\prod_{2}^{-K_1} (\operatorname{sn}(z), \varphi(w))\right]_{w=0}$$
$$\times \left\{ \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} z^{k_0-i} G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(\operatorname{sn}(z), \operatorname{sn}'(z))\right]\right\},$$

де $\varphi(w))$ та многочлени $G_{t,k,l}(x,y)$ визначені для $\operatorname{sn}(z)$ подібно, як в [8] для $\wp(z)$.

Для усіх цілих $s, l_1, \ldots l_n$, $0 \leqslant s < S$, $0 \leqslant l_j < L$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots x_m)$ визначимо

$$R_{s,\overline{l}}(\widetilde{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} B_{\overline{k}}(\widetilde{x}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1\alpha_1 + ... + l_n\alpha_n)^{k_0-i} U_{\overline{l}}^{10K_1}(1,\widetilde{x})\right.$$
$$\left.\times G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(T_{\overline{l}}(1,\widetilde{x})/U_{\overline{l}}(1,\widetilde{x}), S_{\overline{l}}(1,\widetilde{x})/U_{\overline{l}}(1,\widetilde{x}))\right].$$

Згідно леми Зігеля [20] про розв'язки системи рівнянь з алгебраїчними коефіцієнтами, для системи

$$R_{s,\overline{l}}(\widetilde{x}) = 0,\ 0 \leqslant s < S,\ 0 \leqslant l_j < L,\ j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

існують відмінні від нуля многочлени $B_{\overline{k}}(\widetilde{x}) \in \mathbb{K}[\widetilde{x}]$ такі, що $\deg B_{\overline{k}} \leqslant \lambda^{8k+4}D$, $\ln H(B_{\overline{k}}) \leqslant 3\lambda^{1-8k^2}M \ln M$. Як і в [8], нехай ${}^a\mathfrak{p}$ — дегомогенізація ідеалу $\mathfrak{p}$. Позначимо через u найменше ціле число таке, що існує вектор $\overline{u} = (u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^{m-1}, u_i \geqslant 0, u_2 + \cdots + u_m = u$ та існують індекси k_0^*, k_1^*, при яких $\delta_{\overline{u}} B_{k_0^*, k_1^*} \notin {}^a\mathfrak{p}$, де

$$\delta_{\overline{u}} = \prod_{i=2}^{m} \frac{1}{u_i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{u_i}.$$

Тоді з (13) випливає, що $\delta_{\overline{u}} R_{s,\overline{l}}(\widetilde{x}) \in {}^a\mathfrak{p}$. Нехай $C_{\overline{k}}(\widetilde{x}) = \delta_{\overline{u}} B_{k_0,k_1}(\widetilde{x})$, $A_{\overline{k}}(\overline{x})$ — гомогенізація $C_{\overline{k}}(\widetilde{x})$. Для усіх $\overline{k}$ справджується $A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) = \delta_{\overline{u}} B_{k_0,k_1}(\widetilde{x})|_{\widetilde{\omega}}$ та серед $A_{\overline{k}}(\overline{x})$ існує такий, що не лежить в ідеалі $\mathfrak{p}$. Визначимо

$$Q_{s,\overline{l}}(\overline{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\overline{k}}(\overline{x}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n)^{k_0-i} U_{\overline{l}}^{10K_1}(\overline{x}) \right.$$
$$\left. \times G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(T_{\overline{l}}(\overline{x})/U_{\overline{l}}(\overline{x}), S_{\overline{l}}(\overline{x})/U_{\overline{l}}(\overline{x})) \right].$$

Оскільки $\delta_{\overline{u}} R_{s,\overline{l}}(\widetilde{x}) \in {}^a\mathfrak{p}$, то $Q_{s,\overline{l}}(\overline{x}) \in \mathfrak{p}$ і з Леми 2.2 отримаємо оцінку

$$|Q_{s,\overline{l}}(\overline{\omega})| < \exp\left(-\frac{2}{3}\lambda D^k M \ln M \right).$$

З цієї оцінки випливає оцінка Леми 2.6.

Позначимо

$$G(z) = \sigma^{K_1}((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3}) F(z).$$

З властивостей $\mathrm{sn}(z)$ та Леми 1.7, Леми 1.8, (11) і (12) отримаємо наступне твердження.

Лема 2.7. *У крузі* $|z| \leqslant \lambda^{2n+2} D^{1/2}$ *справджується*

$$|G(z)| \leqslant \exp\left(-\frac{3}{8}\lambda D^k M \ln M \right).$$

Застосувавши Леми 1.5–1.7, Лему 2.1, Лему 2.4, Лему 2.5 та Лему 2.7, отримаємо таке твердження.

Лема 2.8. *Для усіх цілих чисел* $s,\ l_1, \ldots, l_n$ *таких, що* $0 \leqslant s \leqslant S,\ 0 \leqslant l_j \leqslant \lambda^{4k+1} D^{1/2}$, *і* $\mathfrak{M}$-*допустимої точки* $l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n$ *справджується*

$$|F^{(s)}(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda D^k M \ln M \right).$$

Усі наведені вище міркування справджуються при $1 \leqslant r \leqslant n/2$, тому $k \geqslant n/2$.

Позначимо $\mathcal{R}$ — факторкільце $\mathbb{K}[\widetilde{x}]/{}^a\mathfrak{p}$, η_i — образи $x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\mathcal{L}$ — поле часток $\mathcal{R}$. Згідно Леми 2.3, $U_{\overline{l}}(\overline{\eta}) \notin \mathfrak{p}$. Визначимо $\overline{\xi}_{\overline{l}} = (\overline{\xi}_{\overline{l},1}, \overline{\xi}_{\overline{l},2}, \overline{\xi}_{\overline{l},3})$ так:

$$\overline{\xi}_{\overline{l}} = (l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n,\ T_{\overline{l}}(\overline{\eta})/U_{\overline{l}}(\overline{\eta}),\ S_{\overline{l}}(\overline{\eta})/U_{\overline{l}}(\overline{\eta}))), \quad \overline{\xi}_{\overline{l}} \in \mathcal{L}^3.$$

Оскільки точки $(\mathrm{sn}(l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n), \mathrm{sn}'(l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n)), \bar{l}=(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\bar{l}\neq 0$, лежать на кривій $y^2=(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)$, то

$$U_{\bar{l}}^2(\overline{\omega})S_{\bar{l}}^2(\overline{\omega})=(U_{\bar{l}}^2(\overline{\omega})-T_{\bar{l}}^2(\overline{\omega}))(U_{\bar{l}}^2(\overline{\omega})-\varkappa^2T_{\bar{l}}^2(\overline{\omega})).$$

Звідси та з Леми 2.5 випливає, що дві останні координати точки $\overline{\xi}_{\bar{l}}$ задовольняють рівняння $\xi_{\bar{l},3}^2=(1-\xi_{\bar{l},2}^2)(1-\varkappa^2\xi_{\bar{l},2}^2)$.

Лема 2.9. *Нехай* $\overline{\xi}_i=(\xi_{i1},\xi_{i2},\xi_{i3})$, $1\leqslant i\leqslant m$, *— точки з різними першими координатами,* $R\in\mathcal{L}[z,x]$, $\deg_z R\leqslant K_0$, $\deg_x R\leqslant K_1$. *Тоді*

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{ord}_{\overline{\xi}_i} R\leqslant(4K_1+2)K_0+2mK_1.$$

Доведення Леми 2.9 аналогічне до доведення Леми 16 з [8].

Нехай
$$D=\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial x}+(2\varkappa^2x^3-(1+\varkappa^2)x)\frac{\partial}{\partial y}$$
— диференціальний оператор в кільці $\mathcal{L}[z,x,y]$. Застосовуючи Лему 1.5 і Лему 2.8, отримаємо наступне твердження.

Лема 2.10. *Для цілих* $s,l_1,\dots,l_n$, $0\leqslant s\leqslant S$, $0\leqslant l_j\leqslant\lambda^{4k+1}D^{1/2}$, *таких, що точка* $l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$ $\mathfrak{M}$*-допустима, виконується* $D^sF(z)|_{l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n}=0$.

Тепер для доведення Теореми 2 достатньо показати суперечність оцінок в Лемі 2.9 і Лемі 2.10. Для многочлена F, побудованого в Лемі 2.6, згідно Леми 2.10 отримаємо

$$\sum\mathrm{ord}_{\overline{\xi}_i}F\geqslant\frac{1}{2}\lambda^{n+1}D^{n/2}M,$$

що суперечить Лемі 2.9. Отримане протиріччя доводить Лему 2.1, а, отже, й Теорему 2.

References

[1] Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem*. Inventiones Math. 1980, **61**, 267–290.

[2] Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] Hurwitz A., Courant R. Allgemeine Funktionentheorie und elliptishe funktionen. Springer, Berlin, 1964.

[4] Kholyavka Ya.M. *On a measure of algebraic independence of values of Jacobi elliptic functions*. Fundamental and Applied Mathematics 2005, **11** (6), 209–219.

[5] Masser D. Elliptic functions and transcendence. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[6] Masser D.W., Wüstholz G. *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*. Inventiones Math. 1983, **72**, 407–464.

[7] Nesterenko Yu.V. *On a measure of the algebraic independence of the values of Ramanujan functions*. Proc. V.A. Steklov Inst. Math. 1997, **218**, 299–334. (in Russian)

[8] Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function*. Izvestiya RAN: Ser. Mat. 1995, **59** (4), 155–178. (in Russian)

[9] Nesterenko Yu.V. *On the measure of algebraic independence of the values of an elliptic function at algebraic points*. Usp. Mat. Nauk 1985, **40** (4), 221–222. (in Russian)

[10] Nesterenko Yu.V. *On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions*. Mat. Sb. 1985, **128** (170, 4), 545–568. (in Russian)

[11] Nesterenko Yu.V. *Transcendence degree of some fields generated by values of the exponential function*. Mat. Zametki 1989, **46** (3), 40–49. (in Russian)

[12] Nesterenko Yu.V. *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*. Mat. Sb. 1984, **123** (165, 4), 435–459. (in Russian)

[13] Nesterenko Yu.V. *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers*. Izv. Acad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 1977, **41** (2), 253–284. (in Russian)

[14] Nesterenko Yu.V. *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*. Mat. Sb. 1984, **123** (165, 1), 11–34. (in Russian)

[15] Nesterenko Yu. On a measure of algebraic independence of the values of elliptic functions. In: P. Philippon (Ed.) Diophantine Approximations and Transcendental Numbers: Proceedings of the Colloquium C.I.R.M. Lumini, 1990. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992, 239–248.

[16] Philippon P. *Varietes abeliennes et independance algebrique*. Inventiones Math. 1983, **72**, 389–405.

[17] Ramachandra K. *Contributions to the theory of transcendental numbers. II.* Acta Arithmetica 1968, **14**, 73–88.

[18] Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp.* Bull. Soc. Math. France 1980, **1**, 47–79.

[19] Shidlovskij A.B. Diophantine approximations and transcendental numbers. Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1982. (in Russian)

[20] Shidlovskij A.B. Transcendental Numbers. Walter de Grueter, Berlin, 1989.

[21] Wüstholz G. *Über das abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes*. Inventiones Math. 1983, **72**, 363–388.

[22] Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra, Vol.1&2. Springer, New-York, 1958.

Надійшло 01.11.2012

Kholyavka Ya.M. *On a measure of algebraic independence of modulus and values of Jacobi elliptic function*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 134–142.

It is proved an estimation of a measure of algebraic independence for the modulus and values at various algebraic points of the Jacobi elliptic function.

Key words and phrases: measure of algebraic independence, Jacobi elliptic function.

Холявка Я.М. *О мере алгебраической независимости модуля и значений эллиптической функции Якоби* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 134–142.

Доказывается оценка меры алгебраической независимости модуля и значений в различных алгебраических точках эллиптической функции Якоби.

Ключевые слова и фразы: мера алгебраической независимости, эллиптическая функция Якоби.