Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 515.12+512.58

Овчар І.Є., Скасків О.Б.

ПРО ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ ЛАПЛАСА, ЗАЛЕЖНИХ ВІД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Про оцінки інтегралів типу Лапласа, залежних від малого параметра* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 106–111.

Встановлюються асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа.

Нехай $f(x)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, а ν — зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+$ міра з необмеженим носієм. Розглянемо функції $F(\sigma)$, визначені на $\mathbb{R}_- := (-\infty; 0)$ за допомогою збіжного для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_-$ інтегралу

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)e^{\sigma x}\nu(dx). \tag{1}$$

Через $\mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо клас таких функцій вигляду (1), а через $\nu(E)$ — позначаємо ν-міру ν-вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_+$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+\cap E} \nu(dx)$.

Зазначимо, що у статтях [5, 6] встановлювались оцінки додатних інтегралів вигляду (1) (збіжних для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+$ в [5], кратних інтегралів типу Лапласа в [6]), при цьому отримані оцінки використовувались при дослідженні асимптотичних властивостей рядів Діріхле. Виявляється, що можна отримувати оцінки зверху інтегралів вигляду (1) через максимум підінтегрального виразу без додаткових припущень стосовно функції f, крім припущень додатності і неперервності. У статті [5] такі оцінки отримано за умов лише на міру ν, при цьому отримувані оцінки виконуються зовні деяких виняткових множин. В [5] також відзначено, що в загальному не можна отримати оцінки інтегралів вигляду (1) зверху через $\mu(\sigma, F)$ без виняткових множин. В [2, c.190–191] функція, подібна до $\mu(\sigma, F)$, вводиться для вивчення цілих функцій, що є перетвореннями Фур'є деякої функції f. А в [1] відзначено природність задачі дослідження асимптотичних властивостей інтегралів Лебега-Стільтьєса в залежності від властивостей міри $\nu(dt) = dv(t)$, де $v(t)$ — додатна монотонна функція.

У цій статті отримаємо деякі асимптотичні оцінки інтегралів вигляду (1) з класу $\mathcal{I}_0(\nu)$ та застосуємо їх до абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon Re\ z < 0\}$ рядів Діріхле з додатними показниками.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: інтеграл типу Лапласа, вимірна функція, міра з необмеженим носієм.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$, таких що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$; L^+ — підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функції; L_1 — клас функцій $\psi \in L$, таких що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

$L_1^+ = L_1 \cap L^+$. Для $\Phi \in L^+$ та $h \in L^+$ введемо класи функцій

$$L_{h,\Phi} := \Big\{\psi \in L_1 \colon h(t) \int_{\Phi(t)/2}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} \to 0 \ (t \to +\infty)\Big\}, \quad L_{h,\Phi}^+ := L_{h,\Phi} \cap L_1^+.$$

Для $\Phi \in L^+$ визначимо клас

$$\mathcal{I}_0(\nu, \Phi) = \{F \in \mathcal{I}_0(\nu) \colon \ln F(\sigma) \geq \Phi(1/|\sigma|) \ (\sigma \in (\sigma_0; 0))\}.$$

Для функції $h \in L^+$ та вимірної множини $E \subset (-\infty; 0)$ асимптотичною h-щільністю множини E у точці $\sigma = 0$ назвемо величину

$$D_h(E) := \varlimsup_{r \to -0} h(1/|r|) \ meas\big(E \cap [r, 0)\big) dx,$$

де $meas\ (E_1) = \int_{E_1} dx$ — Лебегова міра на $\mathbb{R}$ вимірної множини E_1.

Зауваження. Відзначимо, що поняття асимптотичної h-щільності множини E у точці $\sigma = 0$ є змістовним лише у випадку, коли $\varlimsup\limits_{t \to +\infty} h(t)/t > 0$, позаяк у протилежному випадку $D_h(E) = 0$ для $E = [-1; 0)$.

Метод доведень цього повідомлення є близьким до методу доведень з [5, 6], який по-суті експлуатує ту ж ідею, що й у П. Розенблума [8]. Як і в [5, 6], нескладно переконуємось, що при фіксованому $\sigma < 0$ на ймовірнісному просторі $\Omega = \mathbb{R}_+$ з мірою

$$P(dx) = \frac{f(x) e^{\sigma x}}{F(\sigma)} \nu(dx)$$

для випадкової величини $\xi = x$ математичне сподівання $M\xi$ і дисперсія $D\xi$ дорівнюють відповідно

$$M\xi = \int_{\mathbb{R}_+} \xi(x) P(dx) = g'(\sigma), \quad D\xi = g''(\sigma), \quad g(\sigma) = \ln F(\sigma),$$

а за нерівністю Чебишова для $\varepsilon = \sqrt{cD\xi}$, $c > 1$, маємо

$$\frac{1}{F(\sigma)} \int\limits_{|x - g'(\sigma)| \geq \sqrt{cg''(\sigma)}} e^{\sigma x} f(x) \nu(dx) = P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = \frac{1}{c}.$$

Звідси

$$F(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \int\limits_{|x - g'(\sigma)| < \sqrt{cg''(\sigma)}} e^{\sigma x} f(x) \nu(dx) \tag{2}$$

для всіх $\sigma < 0$.

Наступна лема є по-суті варіантом відповідних тверджень з [7, с. 390] та [5, 6].

Лема. *Нехай* $g_0(t)$ *— додатна диференційовна неспадна на* $(-\infty, 0)$ *функція,* ψ *— додатна локально інтегровна на* $(0, +\infty)$ *функція, а множина*

$$E(g_0, \psi) := \{t < 0\colon\ g_0'(t) \geq \psi(g_0(t))\}.$$

Тоді

$$meas\ (E \cap [r, R]) \leq \int\limits_{g_0(r)}^{g_0(R)} \frac{dt}{\psi(t)}, \quad -\infty < r < R < 0.$$

Доведення. Справді,

$$meas(E \cap [r, R]) = \int\limits_{E\cap[r,R]} dt \leq \int\limits_{E\cap[r,R]} \frac{g_0'(t)}{\psi(g_0(t))} dt =$$

$$\int\limits_{g_0(E\cap[r,R])} \frac{dx}{\psi(x)} \leq \int\limits_{g_0(r)}^{g_8(R)} \frac{dx}{\psi(x)}.$$

□

Нехай $supp\ \nu$ — носій міри ν в $\mathbb{R}_+$, тобто замкнена множина $E \equiv supp\ \nu$ є такою, що $\nu(\mathbb{R}_+ \setminus E) = 0$ і $\nu(\{x \in \mathbb{R}_+ : |x - x_0| < r\}) > 0$ для кожних $x_0 \in E$ і $r > 0$.

Для $\sigma < 0$ та $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x)e^{\sigma x}\colon x \in supp\ \nu\}.$$

Нехай

$$\nu(a, b] = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+ : a < x \leq b\}).$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}_0(\nu, \Phi)$. *Якщо*

$$(\exists \psi \in L_{h,\Phi})\colon \varlimsup_{t\to+\infty} \nu\left(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}\right] \leq d < +\infty, \tag{3}$$

то

$$F(\sigma) \leq (d + o(1))\mu_*(\sigma, F)$$

при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E)$, *де виняткова множина* $E \subset \mathbb{R}_-$ *є такою, що* $D_h(E) = 0$.

Доведення. Нехай $\theta > 0$ є таким, що $d\theta < 1$. Для довільного $\varepsilon > 0$ приймемо

$$a = \frac{1 - d\theta}{1 + \varepsilon\theta}$$

та виберемо $c > 1$ так, щоб $c/(c-1) < 1+\varepsilon\theta$. За умовою (3) з деякою функцією $\psi_1 \in L_{h,\Phi}$

$$\nu\left(t - \sqrt{\psi_1(t)}; t + \sqrt{\psi_1(t)}\right] \leq d + a\varepsilon \quad (t \geq t_0). \tag{4}$$

Зауважуючи, що за вибором $(1+\varepsilon\theta)(d+a\varepsilon)=d+\varepsilon$, звідси за нерівністю (2), послідовно скориставшись лемою з $g_0(t)=g'(t)$, $\psi(t)=\psi_1(t)/c$, та нерівністю (4), при $\sigma\to -0$ ($\sigma\notin E(g',\psi)$) отримуємо

$$F(\sigma)<(1+\varepsilon/2)\mu_*(\sigma,F)\nu(g'(\sigma)-\sqrt{\psi_1(g'(\sigma))};g'(\sigma)+\sqrt{\psi_1(g'(\sigma))}]\le(d+\varepsilon)\mu_*(\sigma,F). \quad (5)$$

Позаяк з монотонності g' випливає, що

$$g'(\sigma)\ge(1+\sigma)g'(\sigma)\ge\int_{-1}^{\sigma}g'(t)=g(\sigma)-g(-1)\ge\Phi(1/|\sigma|)/2 \quad (\sigma\to-0),$$

то для асимптотичної h-щільності множини $E_1:=E(g',\psi))$ отримуємо

$$0\le D_h(E_1)\le\overline{\lim_{r\to-0}}\,h(1/|r|)\int_{g'(r)}^{+\infty}\frac{dx}{\psi(x)}\le ch(1/|r|)\int_{\Phi(1/|r|)/2}^{+\infty}\frac{dx}{\psi_1(x)}=0,$$

тобто $D_h(E_1)=0$.

Нехай $\sigma(\varepsilon)$ і $E_1(\varepsilon)$ є такими, що нерівність (5) виконується для всіх $\sigma\in(\sigma(\varepsilon);0)\setminus E_1(\varepsilon)$, при цьому

$$r(1/|r|)\ meas(E_1(\varepsilon)\cap[r;0))\le\varepsilon \quad (r\in(\sigma(\varepsilon);0)).$$

Виберемо тепер послідовності $\varepsilon_n=2^{-n}$, $r_n=\sigma(\varepsilon_n)\nearrow 0$ ($n\to+\infty$), множину

$$E_2=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big([r_n;r_{n+1})\bigcap E_1(\varepsilon_n)\Big)$$

та функцію $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)\colon[r_1,0)\to(0,+\infty)$ таку, що

$$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon_n \text{ для } \sigma\in[r_n;r_{n+1}).$$

Тоді, за доведеним, для всіх $\sigma\in[r_1;0)\setminus E_2$ отримуємо

$$F(\sigma)\le(d+\varepsilon(\sigma))\mu_*(\sigma,F),$$

при цьому $\varepsilon(\sigma)\to0$ ($\sigma\to-0$).

Для оцінки h-щільності множини E_2 при $r\in[r_n;r_{n+1})$ і $n\to+\infty$ маємо

$$h(1/|r|)meas(E_2\cap[r;0))\le h(1/|r|)\big(2^{-n}1/h(1/|r|)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}2^{-k}/h(1/|r_k|)\big)\le\sum_{k=n}^{+\infty}2^{-k}=o(1),$$

тобто $D_h(E_2)=0$. Теорему 1 доведено. □

Зауваження. 1. *Твердження теореми 1 є елементарним у випадку, коли умова (3) виконується з функцією* $\psi\in L_{h,\Phi}$ *такою, що*

$$t-\sqrt{\psi(t)}=O(1)\quad(t\to+\infty),$$

позаяк у цьому випадку з умови (3) випливає, що $\nu(\mathbb{R}_+)<+\infty$.

2. *Якщо* $\Phi(t)=\tau t^\rho$, $\tau\in(0,+\infty)$, $\rho\in(1,+\infty)$, *то, наприклад, у випадку, коли умова (3) виконується з* $\psi(t)\ge t^{1+1/\rho_1}$, $\rho_1\in(1,\rho)$, *твердження теореми 1 перестає бути тривіальним.*

З теореми 1 можна отримати наслідки для абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де (λ_n) — така послідовність, що $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, які при $d = 1$ доповнюють відповідні результати з [4, 3] у частині уточнення опису величини виняткої множини.

Для цього досить вибрати міру ν таку, що для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$

$$\nu(E) = \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E),$$

де δ_λ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці λ, і застосувати теорему 1 до ряду Діріхле

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{\sigma\lambda_n} = \int_0^{+\infty} f(x) e^{x\sigma} d\nu(x) \stackrel{def}{=} I(\sigma),$$

де f — невід'ємна функція така, що $f(\lambda_n) = |F_n|$ і $f(x) = 0$ для всіх $x \notin \{\lambda_n\colon n \ge 0\}$. Тоді $\mu_*(\sigma, I) = \mu(\sigma, F) \stackrel{def}{=} \{|F_n| e^{\sigma\lambda_n}\colon n \ge 0\}$. І, якщо виконуються умови теореми 1 для $I(\sigma)$, то негайно за допомогою нерівностей $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F) \le \mathfrak{M}(\sigma, F)$ отримаємо, що

$$M(\sigma, F) = (1 + o(1))\mu(\sigma, F) \tag{2}$$

при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$. Залишається зауважити, що умови теореми 1 для функції $I(x)$ виконуються як тільки $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \ge \Phi(1/|\sigma|)$ $(\sigma \in (\sigma_0; 0))$ та

$$\lim_{R \to +\infty} h(\varphi(2\lambda_{n+1})) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = 0, \tag{3}$$

де функція φ — обернена до функції Φ. Для того, щоб у цьому переконатись досить вибрати у рамках теореми 1 функцію ψ таку, що

$$\sqrt{\psi(t)} = l_n + \frac{l_{n+1} - l_n}{b_{n+1} - b_n}(t - b_n) \quad (t \in [b_n, b_{n+1})),$$

де $b_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1})/2$, $l_n = (\lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ $(n \ge 1)$, і зауважити, що

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{dt}{\psi(t)} = 2\Big(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\Big), \quad \int_{\lambda_n}^{b_{n+1}} \frac{dt}{\psi(t)} = \Big(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\Big),$$

і, тому, для $R \in [\varphi(2\lambda_n), \varphi(2\lambda_{n+1}))$

$$h(R) \int_{\Phi(R)/2} \frac{dt}{\psi(t)} \le 5 \cdot h(\varphi(\lambda_{n+1})) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}.$$

Отже, доведено такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\Phi \in L,\ h \in L$, *і для абсолютно збіжного у півплощині* $\{z\colon Re\ z < 0\}$ *ряду Діріхле вигляду (1) виконуються умови* $\ln M(\sigma, F) \geq \Phi(1/|\sigma|)$ $(\sigma \in (\sigma_0, 0))$ *та (3). Тоді співвідношення (2) виконується при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$.

На завершення висловимо таке припущення.

Припущення. *Твердження наслідку залишиться правильним, якщо умову (3) замінити умовою*

$$\lim_{r\to+\infty} h(R) \sum_{\lambda_n \geq R\Phi(R)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

яка в загальному є слабшою за умову (3).

Література

1. Бойчук В.С., Гольдберг А.А. *К теореме о трех прямых* // Мат. заметки. — 1974. — Т.25, №1. — С. 45–53.
2. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
3. Сало Т., Скасків О. *Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле* // Матем. Вісник НТШ. — 2007. — Т.3. — С.764–574.
4. Скаскив О.Б. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1989. — Т.53, №4. — С.833–850.
5. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. — 1999. — Т.66, №2. — С.282–292.
6. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа* // Мат. Студії. — 2002. — Т.18, №2. — С.125–146.
7. Hayman W.K. Subharmonic functions. V.2. — London etc.: Acad.Press, 1989. — XXI+591 pp.
8. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions* // Studies Math. Anal. and Related Topics. — Stanford: Calif. Univ. Press, 1962, 325–330.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 23.12.2010

Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *On the estimates of the Laplace integrals on the small parameter*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 106–111.

Asymptotic estimates for the Laplace integrals are established.

Овчар И.Е., Скаскив О.Б. *Об оценках интегралов типа Лапласа, зависимых от малого параметра* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 106–111.

Устанавливаются асимптотические оценки интегралов типа Лапласа.