Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.98

Загороднюк А.В., Кравців В.В.

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ДОБУТКАХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

Загороднюк А.В., Кравців В.В. *Симетричні поліноми на добутках банахових просторів* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 59–71.

В роботі описано множини твірних елементів алгебр блочно-симетричних поліномів на добутках банахових просторів та отримано застосування до опису гомоморфізмів цих алгебр.

Вступ

Симетричні поліноми від багатьох комплексних змінних є класичним об'єктом алгебри і аналізу. Вивчення симетричних поліномів на нескінченновимірних банахових просторах відносно дії повної групи симетрії $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ почалося у роботі А.С. Немировського та С.М. Семенова [3]. Вони показали, що симетричні поліноми на просторах ℓ_p виражаються через алгебраїчну комбінацію елементарних симетричних поліномів. Ці результати було узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою у роботі [7] М. Гонзалеса, Р. Гонзала і Х. Харамілла. Алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_p досліджувалися в [5] і в інших роботах (див. напр. [4]). При дослідженні конкретної комутативної алгебри дуже важливо вміти описати її спектр (множину максимальних ідеалів). Для опису спектру алгебр симетричних аналітичних функцій в [4, 5] використовувалось існування і явний вигляд алгебраїчного базису у відповідних просторах симетричних поліномів. У цій роботі ми досліджуємо поліноми на декартових добутках банахових просторів із симетричним базисом, які є інваріантними відносно дії деякої природної підгрупи $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ (ми будемо їх називати блочно-симетричними).

Опис твірних елементів алгебри $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ поліномів на скінченновимірному просторі, які є інваріантними відносно деякої групи симетрії G, є класичною задачею в алгебраїчній геометрії та теорії інваріантів [2, ст. 102-105]. Зокрема у відомій 14-тій проблемі

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: блочно-симетричні поліноми на добутках банахових просторів, твірні елементи, гомоморфізми.

Гільберта [1] ставиться питання, чи $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ завжди має скінченну систему твірних? Як показує приклад Нагати [2, ст.74-81], в загальному випадку це не так. Проте, існує широкий клас груп G, що описується теоремою Гільберта-Нагати, для якого $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ має скінченну систему твірних елементів, які можуть бути алгебраїчно залежними.

1 Попередні відомості

Нехай X і Y – банахові простори над полем $\mathbb{K}$, $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – симетричний k-лінійний оператор, який діє з простору X^k в простір Y. Зробивши заміну $x_j = x$ для будь-якого $j = 1, \ldots, k$, отримаємо оператор $P_k(x) = A(x, x, \ldots, x)$, який діє з простору X в простір Y. Оператор $P_k(x)$ називається *$k-$однорідним поліномом* степеня k. Оператор $P : X \to Y$, який має вигляд:

$$P(x) = P_0(x) + P_1(x) + ... + P_m(x),$$

називається *поліномом степеня m*. Через $\mathcal{P}(X)$ позначимо алгебру всіх неперервних поліномів на X.

Нехай X — комплексний банахів простір із симетричним базисом. Зауважимо, що базис (e_n) у банаховому просторі X називається *симетричним базисом*, якщо для будь-якої перестановки σ на $\mathbb{N}$ базиси $(e_{\sigma(n)})$ і (e_n) еквівалентні. Очевидно, що X можна розглядати, як простір числових послідовностей. Позначимо $\mathcal{P}_s(X)$ алгебру поліномів на X, які є симетричними (інваріантними) відносно перестановок елементів цих послідовностей.

Послідовність $(S_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}_s(X)$ поліномів називається *алгебраїчно незалежною*, якщо з того, що $q(S_1(x), \ldots, S_n(x)) \equiv 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, випливає що:

$$q(z_1, \ldots, z_n) \equiv 0.$$

У іншому випадку ця послідовність називається *алгебраїчно залежною*. Множина поліномів є *системою твірних елементів* для алгебри $\mathcal{P}_s(X)$, якщо кожен поліном з цієї алгебри можна подати, як скінченну алгебраїчну комбінацію елементів з даної множини, тобто для кожного $P \in \mathcal{P}_s(X)$ існує поліном $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ такий, що $P(x) = q(S_1(x), \ldots, S_n(x))$ для деякого n. Послідовність поліномів $(S_i)_{i=1}^{\infty}$ називається *алгебраїчним базисом* $\mathcal{P}_s(X)$, якщо вона є системою твірних для $\mathcal{P}_s(X)$ і алгебраїчно незалежною. Зауважимо, що алгебраїчний базис не завжди існує.

У статті [7] доведено, що симетричні поліноми вигляду:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

утворюють алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Іншим прикладом алгебраїчного базису в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ є базис "елементарних" симетричних поліномів:

$$S_i(x) = \sum_{k_1 < \ldots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}.$$

2 Симетричні поліноми на просторі векторних послідовностей

Нашим завданням є опис алгебраїчного базису (або множини твірних функцій) симетричних поліномів на просторі ***векторних*** послідовностей. Точніше, нехай:

$$\mathcal{X} = \left(\sum X\right)_{\ell_1} = \oplus_{\ell_1} X,$$

тобто $\mathcal{X}$ є скінченною або нескінченною ℓ_1-сумою копій банахового простору X. Тоді кожен елемент $\overline{x} \in \mathcal{X}$ можна подати у вигляді послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in X$, з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Будемо казати, що поліном P на просторі $\mathcal{X}$ називається *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, , \ldots, x_n, \ldots) = P(x_{\sigma(1)}, , \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$$

для будь-якої блочної перестановки σ. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}$. Ми будемо позначати: $\mathcal{X}_m^n = \oplus_1^m \mathbb{C}^n$, $m = 1, \ldots, \infty$ – ℓ_1-сума m копій простору $\mathbb{C}^n$ і $\mathcal{X}_\infty^\infty$ – нескінченна ℓ_1-сума простору ℓ_1.

Твердження 2.1. *Алгебра $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$ має скінченну систему твірних.*

Доведення випливає з того факту, що група симетрії простору $\mathcal{P}_s(\mathcal{X}_m^n)$ скінченна, і з наслідку в [6, ст. 26].

В загальному випадку, поставлена задача опису твірних $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^\infty)$ є досить складною, тому ми розглянемо два випадки: $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ і $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$.

2.1 Твірні елементи симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$

Твердження 2.2. *Нехай $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ – алгебра блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_2^n$, де $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Тоді твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ будуть поліноми:*

$$\begin{array}{ll} u_i + v_i, & \forall i, 1 \le i \le n; \\ u_i^2 + v_i^2, & \forall i, 1 \le i \le n; \\ u_i u_j + v_i v_j, & \forall i, j, 1 \le i < j \le n; \\ u_i^k + v_i^k, & \forall k > 2, \forall i, 1 \le i \le n, \end{array} \tag{1}$$

де вектори $(u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)$ належать простору $\mathbb{C}^n$. Ці поліноми не утворюють алгебраїчного базису.

Доведення. Спочатку покажемо, що поліноми (1) не утворюють алгебраїчного базису для $n \ge 1$, тобто покажемо, що вони є алгебраїчно залежними. Нехай для фіксованої пари i, j, $i \ne j$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_i + v_i, \\ \eta_2 &= u_j + v_j, \\ \eta_3 &= u_i^2 + v_i^2, \\ \eta_4 &= u_j^2 + v_j^2, \\ \eta_5 &= u_i u_j + v_i v_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Тоді

$$\eta_5^2 - \eta_1\eta_2\eta_5 + \frac{1}{2}\eta_3\eta_2^2 + \frac{1}{2}\eta_4\eta_1^2 - \eta_3\eta_4 \equiv 0. \tag{3}$$

Тотожність легко перевірити при підстановці значень $\eta_k, k = \overline{1,5}$ у цей поліном.

Зауважимо, що поліноми (2) – алгебраїчно залежні, але жоден з них не виражається через інший алгебраїчно. Це випливає з того, що поліноми вигляду $u_i^k + v_i^k$ симетричні відносно будь-якої перестановки і алгебраїчно незалежні, а поліном $\eta_5 = u_iu_j + v_iv_j$ симетричний відносно одночасної перестановки (u_i, u_j) з (v_i, v_j), і тому не може виражатися через $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$.

Далі покажемо, що усі блочно-симетричні поліноми алгебраїчно виражаються через твірні елементи (1). Блочно-симетричні поліноми вигляду:

$$u_i^r u_j^l + v_i^r v_j^l, \qquad 1 \le i < j \le n, \qquad l + r \le n,$$

(степеня не менше ніж 3) можна отримати з рекурентної формули:

$$u_i^r u_j^l + v_i^r v_j^l = (u_i^r u_j^{l-1} + v_i^r v_j^{l-1})(u_j + v_j) - \frac{1}{2}\left((u_j + v_j)^2 - (u_j^2 + v_j^2) \right)(u_i^r u_j^{l-2} + v_i^r v_j^{l-2}).$$

Тут без втрати загальності, ми вважаємо, що $l \ge 2$. Ця формула легко доводиться методом математичної індукції.

Блочно-симетричні поліноми $u_1 \dots u_n + v_1 \dots v_n$ $\forall n > 2$ виражаються через поліноми від меншої кількості змінних за формулою:

$$u_1 \dots u_n + v_1 \dots v_n = \frac{1}{2}[(u_1 \dots u_{n-1} + v_1 \dots v_{n-1})(u_n + v_n)$$
$$+(u_1 \dots u_{n-2}u_n + v_1 \dots v_{n-2}v_n)(u_{n-1} + v_{n-1}) - (u_1 \dots u_{n-2} + v_1 \dots v_{n-2})(u_{n-1}v_n + v_{n-1}u_n)],$$

де $u_{n-1}v_n + v_{n-1}u_n = (u_{n-1} + v_{n-1})(u_n + v_n) - (u_{n-1}u_n + v_{n-1}v_n)$.

Таким чином, блочно-симетричні поліноми більш загального вигляду $u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} + v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$ можна отримати з рекурентних формул:

$$u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} + v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} = \frac{1}{2}[(u_1^{k_1} \dots u_{n-1}^{k_{n-1}} + v_1^{k_1} \dots v_{n-1}^{k_{n-1}})(u_n^{k_n} + v_n^{k_n})$$
$$+(u_1^{k_1} \dots u_{n-2}^{k_{n-2}}u_n^{k_n} + v_1^{k_1} \dots v_{n-2}^{k_{n-2}}v_n^{k_n})(u_{n-1}^{k_{n-1}} + v_{n-1}^{k_{n-1}})$$
$$-(u_1^{k_1} \dots u_{n-2}^{k_{n-2}} + v_1^{k_1} \dots v_{n-2}^{k_{n-2}})(u_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n} + v_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n})],$$

де $u_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n} + v_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n} = (u_{n-1}^{k_{n-1}} + v_{n-1}^{k_{n-1}})(u_n^{k_n} + v_n^{k_n}) - (u_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n} + v_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n})$.

Крім того,

$$\sum_{(i)} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n} = \frac{1}{2}\sum_{(i)} \left((u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} + v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n})^2 - (u_1^{2i_1} \dots u_n^{2i_n} + v_1^{2i_1} \dots v_n^{2i_n})\right),$$

де індекс $(i) = (i_1, \dots, i_n)$ є мультиіндексом. Отже, усі блочно-симетричні поліноми, які утворюють лінійний базис в просторі $\mathcal{X}_2^n$, виражаються через поліноми (1). $\square$

Зауважимо, що кількість поліномів вигляду (3), які показують алгебраїчну залежність твірних елементів (1), дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.2 Твірні елементи симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_\infty^2 = (\sum \mathbb{C}^2)_{\ell_1}$

Розглянемо простір векторних послідовностей $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$. Нехай вектор $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$. Лінійний базис простору поліномів на $\mathcal{X}_m^2$ утворюють поліноми вигляду:

$$x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m}.$$

Просиметризувавши їх, отримаємо поліноми, які утворюють лінійний базис симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$. А саме:

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_1^{k_{\sigma(1)}} \dots x_m^{k_{\sigma(m)}} y_1^{r_{\sigma(1)}} \dots y_m^{r_{\sigma(m)}} = Q_{(i)}(x, y), \tag{4}$$

де $(i) = (k_1, \dots, k_m, r_1, \dots, r_m)$, $x_i, y_j \in X$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ і $\mathcal{S}_n$ – група підстановок на множині $\{1, \dots, n\}$.

Блочно-симетричні поліноми на просторі $\mathcal{X}_\infty^2$ можна утворити з симетричних поліномів на ℓ_1. Нехай $P(x) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$. Розглянемо поліном $G(x, y) = P(ax + by)$, $(x, y) \in \mathcal{X}_\infty^2$. Очевидно, що G є блочно-симетричним. З іншого боку, оскільки P можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації базисних поліномів F_k, то $G(x, y)$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $F_k(ax + by)$.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ – алгебра блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$, де $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$. Тоді твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ будуть поліноми вигляду:*

$$\sum_{k=1}^m x_k^r y_k^{n-r}, \quad 0 \le r \le n, \tag{5}$$

де $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$ і $n \le m$. Ці поліноми є алгебраїчно залежними.

Доведення. Покажемо, спочатку, що поліноми $Q_{(i)}(x, y)$ (4), які утворюють лінійний базис, виражаються через алгебраїчну комбінацію поліномів вигляду $P(ax + by)$ для деякого $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$, тобто:

$$Q_{(i)}(x, y) = s_{(i)}(P_1(a_1x_1 + b_1y_1, \dots, a_1x_m + b_1y_m), \dots, P_\ell(a_\ell x_1 + b_\ell y_1, \dots, a_\ell x_m + b_\ell y_m))$$

$$= s_{(i)}(q_1(F_1(a_1x + b_1y), \dots, F_m(a_1x + b_1y)), \dots, q_\ell(F_1(a_\ell x + b_\ell y), \dots, F_m(a_\ell x + b_\ell y)))$$

для деяких симетричних поліномів $P_1, \dots, P_\ell$.

Доведення проведемо методом математичної індукції по степенях. Спочатку покажемо, що поліноми $Q_{(i)}$ (4), де $\deg(Q_{(i)}) = 2$, виражаються через алгебраїчну комбінацію поліномів $P_k(x, y) = P_k(a_kx + b_ky)$, $k = 1, \dots, \ell$. Нехай $k_i = 1$ і $r_j = 1$. Легко показати, що симетричний поліном $Q_{(1,1)} = \sum\limits_{i,j=1}^m x_iy_j$ виражається за формулою:

$$Q_{(1,1)}(x, y) = F_1(x)F_1(y) + \frac{1}{2}(F_2(x) + F_2(y) - F_2(x + y)),$$

де поліноми F_k є базисними симетричними поліномами. Якщо $k_i = 2$ або $r_j = 2$, то ці поліноми можна отримати як суму $F_2(x) + F_2(y)$.

Припустимо, що кожен поліном $Q_{(i)}(x,y)$ (4), де $\deg(Q_{(i)}(x,y)) = n-1$, виражається через алгебраїчну комбінацію блочно-симетричних поліномів $P_k(x,y)$. Покажемо, що для поліномів степеня n також виконується ця властивість.

Не втрачаючи загальності, можна припустити, що $k_1 \neq 0$. Поліном

$$Q_{(i)}(x,y) = \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

запишемо у вигляді:

$$Q_{(i)}(x,y) = x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+ x_2^{k_1} y_2^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+ \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big).$$

У дужках отримаємо блочно-симетричні поліноми по усіх блоках, крім блоку (x_i, y_i) при множниках $x_i^{k_1} y_i^{r_1}$ відповідно. Звівши поліноми у дужках до блочно-симетричних по усіх блоках, отримаємо наступне представлення полінома $Q_{(i)}(x,y)$:

$$Q_{(i)}(x,y) = x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1}$$

$$\times \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n-1)}} x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n-1)}} y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$= \Big(x_1^{k_1} y_1^{r_1} + x_2^{k_1} y_2^{r_1} + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big) \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - \dots - x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n-1)}} x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n-1)}} y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big), \tag{6}$$

де поліном

$$\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}$$

має степінь менший ніж n.

Далі у дужках біля $x_i^{k_1} y_i^{r_1}$ розглянемо доданки вигляду:

$$x_i^{k_2} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_i^{k_2} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{l-1}^{k_{\sigma(l)}} x_{l+1}^{k_{\sigma(l+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_{l-1}^{r_{\sigma(l)}} y_{l+1}^{r_{\sigma(l+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_i^{k_2} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}.$$

З кожного з цих доданків винесемо множник $x_i^{k_2} y_i^{r_2}$, і у рівності (6) отримаємо доданок вигляду:

$$x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} \Big(x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_2^{k_{\sigma(3)}} x_4^{k_{\sigma(4)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} y_4^{r_{\sigma(4)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} \Big(x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ x_1^{k_{\sigma(3)}} x_4^{k_{\sigma(4)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_4^{r_{\sigma(4)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_1^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+ \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big(x_2^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ x_1^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_1^{k_{\sigma(3)}} x_2^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_2^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n)}} \Big). \tag{7}$$

Зведемо поліноми у дужках цієї рівності до блочно-симетричних по всіх блоках (x_i, y_i). Тоді рівність (7) набуде вигляду:

$$\Big(x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} + \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg)$$

$$-\sum_{l=1}^{n} x_l^{k_1+k_2} y_l^{r_1+r_2} \Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\neq l}}^{n-1} x_l^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_l^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg),$$

де $x_0 = 1$ і $y_0 = 1$.

Провівши над останніми доданками у дужках цієї рівності ті ж самі операції $n-2$ рази, так як і в попередньому випадку, отримаємо один з доданків полінома $Q_{(i)}(x,y)$ (4), який матиме вигляд:

$$\Big(x_1^{k_1} y_1^{r_1} + x_2^{k_1} y_2^{r_1} + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big) \Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{i=1}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg) - \Big(x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} + \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big)$$

$$\times \Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg) + \dots$$

$$+(-1)^{n-2} \Big(x_1^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_1^{r_1+\dots+r_{n-1}} + x_2^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_2^{r_1+\dots+r_{n-1}} + \dots + x_n^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_n^{r_1+\dots+r_{n-1}} \Big)$$

$$\times \Big(x_1^{k_n} y_1^{r_n} + x_2^{k_n} y_2^{r_n} + \dots + x_n^{k_n} y_n^{r_n} \Big)$$

$$+(-1)^{n-1} \Big(x_1^{k_1+\dots+k_n} y_1^{r_1+\dots+r_n} + x_2^{k_1+\dots+k_n} y_2^{r_1+\dots+r_n} + \dots + x_n^{k_1+\dots+k_n} y_n^{r_1+\dots+r_n} \Big).$$

Зробивши аналогічні операції над доданками вигляду:

$$x_i^{k_1} y_i^{r_1} \Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{s=1, s\neq i}^{n-1} x_i^{k_l} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{s-1}^{k_{\sigma(s)}} x_{s+1}^{k_{\sigma(s+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_l} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{s-1}^{r_{\sigma(s)}} y_{s+1}^{r_{\sigma(s+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg),$$

$$x_q^{k_1+k_l} y_q^{r_1+r_l} \Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j\\ i\neq j\neq l}}^{n-1} x_q^{k_m} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_q^{r_m} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Bigg),$$

отримаємо зображення полінома $Q_{(i)}(x,y)$ (4) через поліноми нижчого степеня і твірні елементи (5). Отже, поліноми $Q_{(i)}(x,y)$ можна отримати, як алгебраїчну комбінацію поліномів $P_k(x,y)$ для деяких $P_k(x,y) \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$ і твірних елементів (5).

Тепер покажемо, що твірні елементи (5) виражаються через поліноми вигляду:

$$P(ax+by), \qquad P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m).$$

Нам відомо, що кожен симетричний поліном $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$ виражається через алгебраїчну комбінацію базисних симетричних поліномів:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n, \qquad \forall n \leq m.$$

Тоді кожен $P(ax+by)$ можна записати у вигляді:

$$P(ax+by) = P(ax_1+by_1, \ldots, ax_m+by_m).$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} F_n(ax+by) &= \sum_{k=1}^{m} (ax_k+by_k)^n = a^n F_n(x) + b^n F_n(y) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1} C_n^l a^l x_k^l b^{n-l} y_k^{n-l} \\ &= a^n F_n(x) + b^n F_n(y) + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l a^l b^{n-l} \sum_{k=1}^{m} x_k^l y_k^{n-l}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нехай $a = 1$ і $b \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Поставивши $b_j = j$, з рівності (8) отримаємо:

$$F_n(x+jy) = \sum_{k=1}^{m} (x_k+jy_k)^n = \sum_{k=1}^{m} x_k^n + j^n \sum_{k=1}^{m} y_k^n + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l j^{n-l} \sum_{k=1}^{m} x_k^l y_k^{n-l}. \tag{9}$$

У цій рівності, зробивши наступну заміну $z_i = \sum_{k=1}^{m} C_n^i x_k^{n-i} y_k^i$, при різних значеннях $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ отримаємо систему n рівнянь з n невідомих z_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} &F_n(x) = z_0(x,y), \\ &F_n(x+y) = z_0(x,y) + z_1(x,y) + \ldots + z_{n-2}(x,y) + z_{n-1}(x,y) + z_n(x,y), \\ &F_n(x+2y) = z_0(x,y) + 2z_1(x,y) + \ldots + 2_{n-2}z^{n-2}(x,y) + 2_{n-1}z^{n-1}(x,y) + 2^n z_n(x,y), \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &F_n(x+ny) = z_0(x,y) + nz_1(x,y) + \ldots + n^{n-2}z_{n-2}(x,y) + n^{n-1}z_{n-1}(x,y) + n^n z_n(x,y), \end{aligned} \tag{10}$$

де $n \leq m$.

Систему рівнянь (10) можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} F_n(x) \\ F_n(x+y) \\ F_n(x+2y) \\ \cdots \\ F_n(x+ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Оскільки визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} & n^n \end{pmatrix}$$

містить мінор, який є визначником Вандермонда і не дорівнює нулю, то можна знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Тоді з рівності (11) легко знайти невідомі z_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, за формулою:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} F_n(x) \\ F_n(x+y) \\ F_n(x+2y) \\ \cdots \\ F_n(x+ny) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Оскільки $z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} C_n^i x_k^{n-i} y_k^i$, то поліноми вигляду $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^{n-i} y_k^i$ можна знайти за формулою $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^{n-i} y_k^i = \frac{1}{C_n^i} z_i$, отже, їх можна подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $P(ax+by)$. Тому, поліноми $Q_{(i)}(x,y)$ з (4) можна отримати, як алгебраїчну комбінацію поліномів вигляду $P(ax+by)$.

Оскільки кожен поліном $P(ax+by)$ подається у вигляді алгебраїчної оболонки базисних симетричних поліномів степеня $\leq m$, то достатньо шукати твірні елементи степеня $\leq m$.

З рівності (9) випливає, що довільний блочно-симетричний поліном $G(x,y) = P(ax+by)$ можна отримати як алгебраїчну комбінацію поліномів (5). Отже, твірними елементами блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$ є поліноми (5).

Відомо [2, ст. 103-105], що $h+1$ однорідний поліном від h змінних є алгебраїчно залежними. Тому болочно-симетричні поліноми (5) є алгебраїчно залежними, але не виражаються через алгебраїчну комбінацію один одного. $\square$

Зауваження 2.1. *Поліноми $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ вигляду (2) можна записати як:*

$$\begin{aligned} &\eta_1(x) = F_1(x), \\ &\eta_2(y) = F_1(y), \\ &\eta_3(x) = F_2(x), \\ &\eta_4(y) = F_2(y), \\ &\eta_5(x,y) = \tfrac{F_2(x+y) - F_2(x) - F_2(y)}{2}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $(x) = (x_1, x_2)$, $(y) = (y_1, y_2)$ і $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$. Тоді співвідношення (3) показує алгебраїчну залежність твірних елементів $F_1(x), F_1(y), F_2(x), F_2(y), F_2(x+y)$ в просторі $\mathcal{X}_2^2$.

Зауважимо, що кількість твірних елементів (5) буде не більше ніж $\frac{m^2+m}{2} + 2$.

3 Гомоморфізми алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$

З отриманих результатів та загальної теорії інваріантів [2] випливає, що множина комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ задається функціональними значеннями в точках алгебраїчного многовиду, що є ядром полінома (3) для кожного $i, j = 1, \ldots, n$, тобто φ є гомоморфізмом з $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ в $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли існує точка $z \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$,

$z = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$, координати якої задовольняють рівність (3) для всіх i, j та $\varphi(P) = P(z)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$. У випадку алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ ми не маємо явного вигляду залежності між твірними елементами, тому не можемо записати загального вигляду комплексного гомоморфізму. Проте, можна встановити деякі співвідношення між гомоморфізмами $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ та гомоморфізмами інших алгебр.

Будемо вважати, що алгебри поліномів $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$ і $\mathcal{P}(\ell_1)$ є зліченно нормованими відносно системи норм $\|P\|_r = \sup\limits_{\|x\| \le r} |P(x)|$, $r \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Існує неперервний гомоморфізм:*

$$\psi_a : \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2) \to \mathcal{P}(\ell_1),$$

такий що для кожного $P(x, y) \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$, $\psi_a(P(x, y)) = P(x, a)$.

Доведення. Оскільки $P(x, a) \in \mathcal{P}(\ell_1)$, то $\psi_a(P(x, y)) \in \mathcal{P}(\ell_1)$. Тому ψ_a є відображенням з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ в алгебру $\mathcal{P}(\ell_1)$. Покажемо, що відображення ψ_a є гомоморфізмом. Це випливає з наступних рівностей:

$$\psi_a(P(x, y) + Q(x, y)) = P(x, a) + Q(x, a) = \psi_a(P(x, y)) + \psi_a(Q(x, y));$$

$$\psi_a(P(x, y)Q(x, y)) = P(x, a)Q(x, a) = \psi_a(P(x, y))\psi_a(Q(x, y));$$

$$\psi_a(\beta P(x, y)) = \beta P(x, a) = \beta\psi_a(P(x, y))).$$

Нехай $x, a \in l_1$, $\|a\| \le r$ $\|x\| \le r$. Тоді $\|(x, a)\| = \|x\| + \|a\| \le 2r$. Звідси:

$$|\psi_a(P(x, y))| = |P(x, a)| \le \sup_{\|(x,a)\| \le 2r} |P(x, a)| = \|P\|_{2r}.$$

Отже, гомоморфізм ψ_a є неперервним. □

Наслідок 3.1. *Кожен характер φ на $\mathcal{P}(\ell_1)$ можна продовжити до деякого характеру $\widetilde{\varphi}$ на $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ за формулою:*

$$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi_a,$$

де ψ_a – гомоморфізм з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ у алгебру $\mathcal{P}(\ell_1)$.

Окремим випадком є існування гомоморфізму ψ_a при $a = 0$. Справедливим буде наступне твердження.

Твердження 3.1. *Існує неперервний гомоморфізм:*

$$\psi : \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2) \to \mathcal{P}_s(\ell_1),$$

такий що $P(x, y) \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$, $\psi(P(x, y)) = P(x, 0)$. *Гомоморфізм ψ є проектором на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.*

Доведення. Оскільки $P(x,0) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$, то $\psi(P(x,y)) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$. Тому ψ є відображенням з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ у алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Доведення того, що відображення ψ є гомоmрфізмом проводиться аналогічно до доведення теореми 2.

Нехай $x \in \ell_1$ і $\|x\| \le r$. Тоді:

$$|\psi(P(x,y))| = |P(x,0)| \le \sup_{\|x\|\le r} |P(x,0)| = \|P\|_r.$$

Отже, гомоморфізм ψ є неперервним.

Оскільки $\psi(\psi(P(x,y))) = \psi(P(x,0)) = P(x,0)$, то $\psi(\psi(P(x,y))) = \psi(P(x,y))$. Звідси випливає, що ψ є проектором. $\square$

Наслідок 3.2. *Кожен характер φ на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ можна продовжити до деякого характеру $\widetilde{\varphi}$ на $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ за формулою:*

$$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi,$$

де ψ – гомоморфізм з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ у алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Очевидно, можна сформулювати аналоги теореми 2, твердження 3.1 і відповідних наслідків для $m < \infty$. В цьому випадку доведення буде аналогічним. Також, гомоморфізми ψ_a і ψ з теореми 2 та твердження 3.1 продовжуються за неперервністю до гомоморфізмів алгебр Фреше, якими є поповнення $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ та $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ у відповідних метриках.

Література

1. Александров П. С. Проблеы гильберта. – М.: Наука, 1969.
2. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. – М.: Мир, 1974.
3. Немировский А. С., Семенов С. М. *О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве* // Математичиский зборник. – 1973. – Т 92, № 2. – С. 257-281.
4. Чернега І. В. *Симетричні поліними на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т.1, №2. – С. 105-125.
5. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55-64.
6. Eisenbud D. Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry, Springer Science, 2004.
7. Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*, Jour. London Math. Soc., **59** (1999), 681–697.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 10.06.2010

Zagorodnyuk A.V., Kravtsiv V.V. *Symmetric polynomials on the product of Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 59–71.

The paper contains a description of sets of generators of algebra of vector-symmetric polynomials on products of Banach spaces. Some applications to complex homomorphisms of these algebras are obtained.

Загороднюк А.В., Кравцив В.В. *Симметричиские полиномы на произведениях банаховых пространств* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 59–71.

В работе сделано описание множества образующих елементов алгебр векторно-симметричеcких полиномов на произведениях банаховых пространств и получено применение к описанию гомоморфизмов этих алгебр.