Карпатські математичні
публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Загороднюк А.В.

АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Загороднюк А.В. *Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 15–34.

В роботі зроблено огляд основних результатів про структуру множини максимальних ідеалів алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі та доведено деякі нові результати в цьому напрямку. Отримано також застосування до інтерполяції в алгебрах аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору.

Вступ

Дослідження алгебр аналітичних функцій на підмножинах банахового простору, зокрема рівномірних алгебр, є важливим напрямком сучасної теорії аналітичних функцій на банахових просторах. Оскільки кожна рівномірна алгебра є підалгеброю алгебри неперервних функцій на множині максимальних ідеалів (характерів), то визначальними в цих дослідженнях є проблема опису множини максимальних ідеалів та опису аналітичних структур (структур аналітичного многовиду) на цій множині. Зауважимо, що у нескінченновимірному банаховому просторі існує дуже багато різних цікавих алгебр аналітичних функцій. В останні роки зріс інтерес до алгебри $H_b = H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X, введених у [17], алгебри $H^\infty(B)$ обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору, алгебри $H^\infty_{uc}(B)$ аналітичних рівномірно неперервних функцій на одиничній кулі банахового простору. Крім того, вивчаються "слабкі" аналоги цих алгебр. Дослідження у цьому напрямку були започатковані в роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Корна та Т. Гамеліна [6], [2], [3]. Далі ця тема набула розвитку в [4], [12], [13], [14], [21]. При цьому повний опис множини максимальних ідеалів алгебр H_b і $H^\infty_{uc}(B)$ було отримано лише для дуже вузького класу просторів.

У роботах автора [24], [25] запропоновано новий підхід до вивчення цієї проблеми, який дозволяє отримати явний опис множини характерів вказаних алгебр у вигляді послідовності елементів з деяких підпросторів тензорних степеней вихідного простору. В даній роботі уточнено результати [24] і знайдено нові застосування цих результатів у теорії аналітичних відображень на банахових просторах.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

Стаття містить широкий огляд з даної тематики та всі необхідні попередні відомості. Детальнішу інформацію про аналітичні функції на банахових просторах можна знайти в монографіях [8], [9], [20].

1 Попередні відомості

Лінійний підпростір J комутативної комплексної банахової алгебри X з одиницею $\mathbf{1}$ називається ідеалом, якщо $ayb \in J$ для довільних $a, b \in X$ і $y \in J$. Власний ідеал називається максимальним, якщо він не міститься строго в іншому власному ідеалі. Гомоморфізм з банахової алгебри X в поле $\mathbb{C}$ називається *характером* (*мультиплікативним функціоналом*). Надалі ми будемо вживати терміни “характер”, “мультиплікативний функціонал”, “комплексний гомоморфізм” як синоніми. Відомо, що довільний характер на банаховій алгебрі є неперервним і його норма дорівнює одиниці. Ядро кожного ненульового характера є максимальним ідеалом. Якщо X — комутативна алгебра, то вірно навпаки: кожен максимальний ідеал є ядром деякого характера. Для комутативних банахових алгебр прийнято ототожнювати множину характерів і множину максимальних ідеалів. Цю множину позначають $M(X)$ і називають *спектром* алгебри X. Підмножина

$$\mathcal{R} = \{a \in X \ : \ \mathbf{1} + xa \text{ є оборотнім елементом для довільного } x \in X\}$$

називається *радикалом Джекобсона* алгебри X. Банахова алгебра X називається *напівпростою*, якщо $\mathcal{R} = \{0\}$. Для комутативних алгебр це рівносильно тому, що комплексні гомоморфізми розділяють точки на X. Відомо, що якщо X — напівпроста комутативна банахова алгебра, то кожному елементу $x \in X$ відповідає функція $\widehat{x}$ на $M(X)$, визначена формулою $\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x)$, де φ — довільний характер з X. Відображення $x \mapsto \widehat{x}$ називають *перетворенням Гельфанда.* Найслабша топологія на $M(X)$, в якій всі функції $\widehat{x}$, $x \in X$ є неперервними, називається *топологією Гельфанда.* Відомо, що для банахової алгебри $M(X)$ є компактним гаусдорфовим простором в топології Гельфанда. Таким чином, кожна напівпроста комутативна банахова алгебра вкладається як підалгебра в алгебру всіх неперервних функцій на деякому компакті (який збігається з $M(X)$). Це вкладення здійснюється перетворенням Гельфанда. Напівпроста комутативна алгебра називається рівномірною, якщо перетворення Гельфанда є ізометрією. Детальнішу інформацію про банахові алгебри можна знайти в книжках [23], [11], [19].

Ми будемо казати, що Z — *алгебра Фреше,* якщо Z — простір Фреше (локально-опуклий метризовний простір) і напівнорми на Z, які породжують локально опуклу топологію на Z, можна вибрати мультиплікативно опуклими. Іншими словами, топологія на Z задається деякою зліченною системою напівнорм q_j таких, що

$$q_j(xy) \leq q_j(x)q_j(y),$$

для довільних $x, y \in Z$, $j = 1, \ldots, \infty$.

Нехай X і Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$ комплексних $\mathbb{C}$ або дійсних $\mathbb{R}$ чисел. Для натуральних $n, m \in \mathbb{N}$, будемо позначати X^nY^m — декартовий добуток n-того декартового степеня простору X із m-тим декартовим степенем простору Y.

Використовуючи позначення з монографії Нахбіна [22], які тепер є загальноприйнятими, для довільного $n \in \mathbb{N}$ ми позначимо $\mathcal{L}({}^nX, Y)$ простір всіх неперервних n-лінійних відображень з X в Y. Нехай Δ_n є природним вкладенням, яке називається *діагональним відображенням* з X в X^n, визначеним наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta_n : \quad & X \to X^n \\ & x \mapsto (x, \dots, x). \end{aligned}$$

Відображення P з X в Y називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо $P(x) = B(\Delta_n(x))$ для деякого $B \in \mathcal{L}({}^nX, Y)$. Ми будемо позначати $\mathcal{P}({}^nX, Y)$ — лінійний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з X в Y. n-лінійне відображення B називається симетричним, якщо $B(x_1, \dots, x_n) = B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ для довільної підстановки σ на множині $\{1, \dots, n\}$. Простір усіх симетричних n-лінійних неперервних відображень позначається $\mathcal{L}_s({}^nX, Y)$.

Твердження 1.1. ([8]). *Простори $\mathcal{L}({}^nX, Y)$ і $\mathcal{L}_s({}^nX, Y)$ є банаховими просторами відносно рівномірної норми на одиничній кулі X^n.*

Теорема 1. ([8]). *Відображення*

$$\begin{array}{cl} \mathcal{L}_s({}^nX, Y) & \to \mathcal{P}({}^nX, Y) \\ B & \mapsto B \circ \Delta_n \end{array}$$

є ізоморфізмом між банаховим простором $\mathcal{L}_s({}^nX, Y)$ і простором n-однорідних поліномів $\mathcal{P}({}^nX, Y)$ з топологією рівномірної збіжності на одиничній кулі простору X. При цьому

$$\|B \circ \Delta_n\| \le \|B\| \le c(n, X)\|B \circ \Delta_n\|, \tag{1}$$

де $c(n, X)$ — поляризаційна константа, $1 \le c(n, X) \le \frac{n^n}{n!}$.

Основним інструментом при доведенні цієї теореми є *поляризаційна формула*

$$B(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n B \circ \Delta_n \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right). \tag{2}$$

Наслідок 1.1. *Простір $\mathcal{P}({}^nX, Y)$ є банаховим простором і для довільного полінома $P \in \mathcal{P}({}^nX, Y)$ існує єдине n-лінійне симетричне відображення $A_P \in \mathcal{L}({}^nX, Y)$, яке називається асоційованим з P n-лінійним відображенням, таке, що $P = A_P \circ \Delta_n$.*

Позначимо $X^{(n)}$ простір формальних сум $\sum_i \lambda_i(x_1, \dots, x_n)$, де $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Нехай I — підпростір в $X^{(n)}$, породжений елементами вигляду

$$(x_1, \dots, x_k + x_k', \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_k', \dots, x_n), \tag{3}$$

$$(x_1, \dots, \lambda x_k, \dots, x_n) - \lambda(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \qquad 1 \le k \le n.$$

Нагадаймо, що n-тий *тензорний степінь* $\otimes^n X$ простору X визначається як $X^{(n)}/I$. При цьому $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n := (x_1, \dots, x_n) + I$. Позначимо i_n — n-лінійне відображення з X^n в $\otimes^n X$ таке, що $i_n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Визначимо

$$i_n^*(B)\left(\sum_i \lambda_i x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}\right) := \sum_i \lambda_i B(x_{i1}, \dots, x_{in})$$

для довільної n-лінійної форми $B \in \mathcal{L}(^n X, Y)$. Відображення i_n^* є коректно визначеним і $i_n^*(B)(x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}) = B(x_{i1}, \dots, x_{in})$.

Існує багато способів ввести топологію на тензорному добутку. Нам необхідно мати топології, породжені нормами на $\otimes^n X$, відносно яких відображення i_n та i_n^* є неперервними. Ми розглянемо норму, яка породжує найсильнішу топологію в класі локально опуклих топологій.

Позначимо $X \otimes_\pi X$ — поповнення $X \otimes X$ за нормою

$$\|w\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i_1,\dots,i_n} \|x_{i1}\| \dots \|x_{in}\| : w = \sum_{i_1,\dots,i_n} x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}\right\}.$$

Простір $X \otimes_\pi X$ називається *проективним* тензорним добутком простору X на себе, а простір $\otimes_\pi^n X := \underbrace{X \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X}_{n}$ — *проективним* тензорним степенем простору X.

Теорема 2. ([16]). *Простір $\mathcal{L}(^n X, Y)$ є ізометрично ізоморфним до простору лінійних операторів $\mathcal{L}(\otimes_\pi^n X, Y)$ з проективного тензорного добутку $\otimes_\pi^n X$ в Y.*

Симетричним тензорним степенем $\otimes_{s,\pi}^n X$ простору X називається замкнений підпростір в $\otimes_\pi^n X$, породжений векторами

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_i \in X$ і $\mathcal{S}_n$ є групою підстановок на множині $\{1, \dots, n\}$.

Твердження 1.2. *Підпростір $\otimes_{s,\pi}^n X$ є доповнювальним в $\otimes_\pi^n X$ і відображення*

$$\nu_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n$$

є проектором.

Наслідок 1.2. *Простір $\mathcal{L}(\otimes_{s,\pi}^n X, Y)$ — ізометрично ізоморфний до простору $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$.*

Безпосередньою перевіркою можна показати, що з поляризаційної формули і наслідку 1.2 випливає наступне співвідношення:

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right).$$

Отже, кожен вектор $w \in \otimes^n_{s,\pi} X$ має зображення

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\otimes n} = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{x_i \otimes \cdots \otimes x_i}_{n}.$$

Покладемо

$$|||w||| := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^n \,:\, w = \sum_{i=1}^{\infty} \otimes^n x_i \right\}. \tag{4}$$

Тоді для довільної форми $B \in \mathcal{L}_s({}^n X, Y)$

$$|||B||| = \sup_{|||w|||=1} \|i_n^*(B)(w)\| = \|B \circ \Delta_n\|.$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Існує еквівалентна норма $|||\cdot|||$ на $\otimes^n_{s,\pi} X$ така, що простір лінійних операторів $\mathcal{L}((\otimes^n_{s,\pi} X, |||\cdot|||), Y)$ є ізометричним до простору поліномів $\mathcal{P}({}^n X, Y)$ для кожного банахового простору Y і*

$$\|w\| \le |||w||| \le c(n, X)\|w\|, \qquad 1 \le c(n, X) \le \frac{n^n}{n!}. \tag{5}$$

Відображення $P : X \to Y$ називається поліномом (поліноміальним відображенням) степеня n, якщо $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$, де $P_0 \in Y$, $P_k \in \mathcal{P}({}^k X, Y)$ і $P_n \ne 0$. Простір усіх поліномів з X в Y позначається $\mathcal{P}(X, Y)$. Ми будемо позначати простори $\mathcal{P}({}^k X, \mathbb{C})$ і $\mathcal{P}(X, \mathbb{C})$ через $\mathcal{P}({}^k X)$ і $\mathcal{P}(X)$ відповідно. Зауважимо, що $\mathcal{P}(X)$ є топологічною алгеброю з топологією локально опуклої прямої суми. Ми будемо використовувати позначення $\mathcal{P}({}^{\le n} X, Y)$ і $\mathcal{P}({}^{\le n} X)$ для просторів Y-значних і $\mathbb{C}$-значних поліномів степеня n відповідно, на X. Це — банахові простори з нормою супремум на одиничній кулі. Легко бачити, що $\mathcal{P}({}^{\le n} X, Y)$ ізоморфний прямій сумі просторів $(\otimes^k_{s,\pi} X)'$, $0 \le k \le n$.

Поліном P називається поліномом *скінченного* типу, якщо P є скінченною сумою скінченних добутків лінійних неперервних функціоналів. Простір n-однорідних поліномів скінченного типу позначається $\mathcal{P}_f({}^n X)$. Поповнення цього простору в рівномірній топології позначається $\mathcal{P}_c({}^n X)$ і називається простором n-однорідних *апроксимовних* поліномів. Зауважимо, що простір $\mathcal{P}_c({}^n X)$ ізометричний простору $\otimes^n_{s,\varepsilon} X'$. Очевидно, що всі поліноми з $\mathcal{P}_f({}^n X)$ (і тільки вони [2]) є слабко неперервними. Крім того, всі поліноми з $\mathcal{P}_c({}^n X)$ є слабко неперервними на обмежених множинах. Навпаки вірно, якщо X' має властивість апроксимації [5]. Для деяких просторів, таких як c_0, простір неперервних функцій на розрідженому компакті, простір Цірельсона, всі неперервні поліноми є слабко неперервними на обмежених множинах.

Підмножина Ω банахового простору X називається *скінченно відкритою*, якщо її перетин з довільним скінченновимірним афінним підпростором є відкритою множиною в цьому підпросторі.

Відображення $f : \Omega \to Y$ називається G-*аналітичним* (позначення $f \in H_G(\Omega, Y)$), якщо звуження f на $E \cap \Omega$ є аналітичним відображенням для довільного скінченновимірного афінного підпростору E (еквівалентно, для довільного одновимірного афінного підпростору $E \in X$).

Твердження 1.3. *Нехай Ω — скінченно відкрита підмножина в X і $f \in H_G(\Omega, Y)$, $a \in \Omega$.*

1. *Існує єдина послідовність k-однорідних поліномів (не обов'язково неперервних) $\widehat{d}_a^k f : X \to Y$ таких, що*
$$f(a+x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x)$$
для всіх x, що належать найбільшій радіальній підмножині $\omega(a)$ множини $\Omega - a$. Ряд праворуч збігається поточково.

2. *Поліноми $\widehat{d}_a^k f$ визначаються єдиним чином рівністю*
$$\frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(a + e^{ik\theta} x) d\theta, \quad x \in \omega(a).$$

Означення 1.1. *G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині $\Omega \subset X$ із значеннями в Y, називається аналітичним (позначаємо $f \in H(\Omega, Y)$), якщо воно є неперервним.*

Зауважимо, що коли $f \in H(\Omega, Y)$ і $a \in \Omega$, то $\widehat{d}_a^k f$ є неперервні k-однорідні поліноми на X, які збігаються з похідними Фреше k-того порядку функції f в точці a. Ряд
$$f(a+x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x)$$
є рядом Тейлора функції f в околі точки a.

Твердження 1.4. *Нехай f — G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині Ω. Наступні твердження еквівалентні.*

1. *f є аналітичним.*
2. *f є локально обмеженим.*
3. *f є неперервним в деякій точці множини Ω.*
4. *Поліноми $\widehat{d}_a^k f$ є неперервними для кожного k.*

Аналітична функція f називається *цілою,* якщо вона визначена на всьому просторі X.

Нехай $f \in H(\Omega, Y)$, де Ω відкрита підмножина в X і $x \in \Omega$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset \Omega$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$.

Теорема 4. *Радіус рівномірної збіжності функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X,Y)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n}\right)^{-1},$$

де $f_n = \frac{\widehat{d_x^k f}}{n!}$.

Позначимо $H_b(X)$ — простір цілих функцій *обмеженого типу,* який складається з цілих функцій на X, які є обмеженими на обмежених множинах (тобто мають нескінченний радіус обмеженості). Зауважимо, що в довільному нескінченновимірному просторі X існує комплекснозначна ціла функція f така, що $\varrho(f) < \infty$ для кожного $x \in X$. Простір $H_b(X)$ є алгеброю Фреше з топологією, породженою напівнормами

$$\|f\|_r = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < r\},$$

де $r > 0$ — раціональні числа.

Кожен функціонал $\varphi \in H_b(X)'$ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на деякій кулі в X. *Радіус-функція* $R(\varphi)$ функціонала φ визначена як інфімум всіх $r > 0$ таких, що φ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі rB.

Позначимо φ_n — звуження φ на підпростір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$. Тоді φ_n є неперервним лінійним функціоналом на $\mathcal{P}(^nX)$ і

$$\|\varphi_n\| = \sup\{\varphi(P) : P \in \mathcal{P}(^nX), \|P\| \le 1\}.$$

Теорема 5. *Радіус-функція R на $H_b(X)'$ задовольняє рівність*

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n}.$$

Теорема 6. *Нехай $\varphi_n \in \mathcal{P}(^nX)'$ для $n \ge 0$, для норм функціоналів φ_n виконується нерівність*

$$\|\varphi_n\| \le cs^n$$

для деякого $c, s > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\varphi \in H_b(X)'$, звуження якого на $\mathcal{P}(^nX)$ збігається з φ_n, $n \ge 0$.

Довільне неперервне n-лінійне відображення $B : X \times \cdots \times X \to \mathbb{C}$ може бути продовжене до неперервного, n-лінійного відображення $\widetilde{B} : X'' \times \cdots \times X'' \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$\widetilde{B}(x_1'', \dots, x_n'') = \lim_{\alpha_1} \dots \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}),$$

де для кожного k, $1 \le k \le n$, (x_{α_k}) — це напрямленість в X, збіжна в $*$-слабкій топології до x_k''.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^nX)$ і B є n-лінійним відображенням, асоційованим з P. Тоді *продовження Арона-Бернера* $\widetilde{P}$ полінома P визначається формулою $\widetilde{P} := \widetilde{B}(x, \dots, x)$ [1], [7].

Теорема 7. *Нехай $f \in H_b(X)$ і $f = \sum f_n$ розвинення у ряд Тейлора. Тоді існує функція $\widetilde{f} \in H_b(X'')$ яка розвивається у ряд Тейлора $\widetilde{f} = \sum \widetilde{f}_n$ і $\widetilde{f}_n$ є продовженням Арона-Бернера відповідного полінома f_n. Крім того, $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ і оператор $f \mapsto \widetilde{f}$ є гомоморфізмом алгебр Фреше $H_b(X)$ і $H_b(X'')$.*

Доведення вказаних результатів з теорії тензорних добутків, поліномів і аналітичних відображень можна знайти в [8], [9], [2].

2 Поліноми на тензорних добутках

Нам потрібно встановити деякі технічні результати стосовно поліномів, визначених на тензорному добутку банахового простору.

Твердження 2.1. *Нехай $P \in \mathcal{P}(^{km}X)$ для деяких натуральних m і k. Тоді існує єдиний поліном $P_{(m)} \in \mathcal{P}(^k\otimes^m_{s,\pi}X)$ такий, що $P_{(m)}(x^{\otimes m}) = P(x)$ і $\|P\| \le \|P_{(m)}\|$.*

Доведення. Нехай A_P — симетрична полілінійна форма, асоційована з P. Розглянемо значення $A_P(x_1^m, \dots, x_k^m)$ для деяких $x_1, \dots, x_k \in X$. Для довільних фіксованих

$$x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k, \quad 1 \le j \le k, \quad A_P(x_1^m, \dots, x_j^m, \dots, x_k^m)$$

є m-однорідним поліномом від $x_j \in X$ і, отже, $A_P(x_1^m, \dots, x_j^m, \dots, x_k^m)$ може бути подано як значення деякого неперервного лінійного функціонала на $\otimes^m_{s,\pi}X$ в точці $x_j^{\otimes m}$. Оскільки це справджується для всіх $1 \le j \le k$, існує єдине симетричне неперервне полілінійне відображення $A_{P_{(m)}} \colon {}^m(\otimes^m_{s,\pi}X) \to \mathbb{C}$ таке, що $A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \dots, x_k^{\otimes m}) = A_P(x_1^m, \dots, x_k^m)$. Покладемо $P_{(m)}(x^{\otimes m}) := A_{P_{(m)}}(x^{\otimes m}, \dots, x^{\otimes m})$. Оскільки $\|x^{\otimes n}\| \le 1$ при $\|x\| \le 1$, то $\|P\| \le \|P_{(m)}\|$. $\square$

Зауважимо, що для довільного $P_{(m)} \in \mathcal{P}(^k\otimes^m_{s,\pi}X)$ ми можемо визначити єдиним чином поліном $P(x) = P_{(m)}(x^{\otimes m})$ з $\mathcal{P}(^{km}X)$. Отже відображення $P \mapsto P_{(m)}$ є ізоморфізмом банахових просторів $\mathcal{P}(^{km}X)$ і $\mathcal{P}(^k\otimes^m_{s,\pi}X)$.

Наслідок 2.1. *Простори $\otimes^{km}_{s,\pi}X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\Big(\otimes^m_{s,\pi}X\Big)$ є ізоморфними.*

Доведення. Простори $\otimes^{km}_{s,\pi}X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\Big(\otimes^m_{s,\pi}X\Big)$ містять щільний підпростір — алгебраїчний симетричний тензорний степінь простору X, $\otimes^{km}_sX$. З ізоморфності просторів $\mathcal{P}(^{km}X)$ і $\mathcal{P}(^k\otimes^m_{s,\pi}X)$ випливає еквівалентність їх норм. Тому спряжені норми є еквівалентними на $\otimes^{km}_sX$. Отже $\otimes^{km}_{s,\pi}X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\Big(\otimes^m_{s,\pi}X\Big)$ є поповненнями простору $\otimes^{km}_sX$ відносно еквівалентних норм. Тому ці простори ізоморфні. $\square$

Нехай w — деякий елемент з $\otimes^{km}_{s,\pi}X$. Ми будемо ототожнювати w з його образом в $\otimes^k_{s,\pi}\Big(\otimes^m_{s,\pi}X\Big)$ при природному ізоморфізмі. Розглянемо наступні норми для w. Нехай $\|w\|$ буде проективна тензорна норма в $\otimes^{km}_{s,\pi}X$. Тобто

$$\|w\| = \inf\Big\{\sum_{j_1,\dots,j_n} \|x_{j_1}\| \cdots \|x_{j_n}\| \colon w = \sum_{j_1,\dots,j_n} x_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{j_n}\Big\},$$

де $n = km$. Згідно з (4), ми можемо визначити

$$|||w||| := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^{km}\colon w = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{\otimes km}\Big\}.$$

Покладемо, також,

$$\|w\|_{(m)} := \inf\Big\{\sum_{j_1,\dots,j_m}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1}\otimes\cdots\otimes x_{ij_m}\Big\|^k\colon$$
$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1}\otimes\cdots\otimes x_{ij_m}\Big)^{\otimes k}\Big\},$$

$$|||w|||_{(m)} := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m}\Big\|^k\colon w = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m}\Big)^{\otimes k}\Big\}$$

і нарешті,

$$\|w\|_{(k)(m)} := \inf\sum_{j_1,\dots,j_m}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k}\|x_{i_1j_1}\|\cdots\|x_{i_1j_m}\|\Big)\cdots\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k}\|x_{i_kj_1}\|\cdots\|x_{i_kj_m}\|\Big),$$

де інфімум береться по всіх зображеннях

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} x_{i_1j_1}\otimes_s\cdots\otimes_s x_{i_1j_m}\Big)\otimes_s\cdots\otimes_s\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} x_{i_kj_1}\otimes_s\cdots\otimes_s x_{i_kj_m}\Big). \qquad (6)$$

Зауважимо, що зображення

$$w = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m}\Big)^{\otimes k}$$

є частковим випадком зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1}\otimes\cdots\otimes x_{ij_m}\Big)^{\otimes k}. \qquad (7)$$

Тому $\|w\|_{(m)} \le |||w|||_{(m)}$. Нехай

$$u_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1}\otimes\cdots\otimes x_{ij_m}. \qquad (8)$$

З поляризаційної нерівності (5) маємо

$$\|u_j\| = \inf\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{ij_1}\|\cdots\|x_{ij_m}\| \ge \frac{1}{c(m,X)}|||u_j|||,$$

де інфімум береться по всіх зображеннях (8). Порівнюючи формули (7) і (8), ми бачимо, що $\|w\|_{(m)} \ge 1/[c(m,X)]^k|||w|||_{(m)}$ або

$$\|w\|_{(m)} \le |||w|||_{(m)} \le [c(m,X)]^k\|w\|_{(m)}. \qquad (9)$$

Зауважимо, також, що зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m} \Big)^{\otimes k} \tag{10}$$

є частковим випадком зображення (6). Тому

$$\|w\|_{(k)(m)} \le \|w\|_{(m)} \le c(k, \otimes^m_{s,\pi}) \|w\|_{(k)(m)}. \tag{11}$$

З іншого боку, зображення (6) є частковим випадком зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_n} x_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{j_n}.$$

Отже,

$$\|w\| \le \|w\|_{(k)(m)} \le s_{k,m} \|w\| \tag{12}$$

для деякої константи $s_{k,m}$.

Порівнюючи формули (9),(11),(12) і беручи до уваги, що

$$\|w\| \le |||w||| \le c(km, X)\|w\|$$

маємо наступні нерівності:

$$|||w||| \le c(km, X)|||w|||_{(m)}.$$

З твердження 2.1 випливає, що $|||w|||_{(m)} \le |||w|||$. Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай $w \in \otimes^{km}_{s,\pi} X$ і $P \in \mathcal{P}(^{km}X)$. Тоді*

$$|||w|||_{(m)} \le |||w||| \le c(km, X)|||w|||_{(m)}$$

і

$$\|P\| \le \|P_{(m)}\| \le c(km, X)\|P\|.$$

Нехай тепер $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$ для деяких $k_1, \dots, k_m$ і P — n-однорідний поліном. Означимо відображення $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ на декартовому добутку

$$X \times \otimes^2_{s,\pi} X \times \cdots \times \otimes^m_{s,\pi} X$$

так, що $B^P_{k_1,\dots,k_m}(x_1, x_2^{\otimes 2}, \dots, x_j^{\otimes j}, \dots, x_m^{\otimes m})$ є k_j-однорідним поліномом від $x_j^{\otimes j}$ для фіксованих $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ для кожного $1 \le j \le m$ і

$$B^P_{k_1,\dots,k_m}(x, x^{\otimes 2}, \dots, x^{\otimes m}) = P(x). \tag{13}$$

Як у твердженні 2.1, відображення $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ коректно визначене і

$$\|B^P_{k_1,\dots,k_m}\| \ge \|P\|.$$

Нехай $w \in \otimes^n_{s,\pi} X$. Тоді за теоремою 8,

$$\begin{aligned}\|w\|_{k_1,\ldots,k_m} &:= \inf\Big(\sum_{i_1=1}^\infty \|x_{i_1}\|\Big)^{k_1}\Big(\sum_{i_2=1}^\infty \|x_{i_2}\|^2\Big)^{k_2}\cdots\Big(\sum_{i_m=1}^\infty \|x_{i_m}\|^m\Big)^{k_m}\\ &\le c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)\|w\|,\end{aligned}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях

$$w = \Big(\sum_{i_1=1}^\infty x_{i_1}\Big)^{\otimes k_1}\Big(\sum_{i_2=1}^\infty x_{i_2}^{\otimes 2}\Big)^{\otimes k_2}\cdots\Big(\sum_{i_m=1}^\infty x_{i_m}^{\otimes m}\Big)^{\otimes k_m}.$$

Таким чином, ми довели наступний наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $P \in \mathcal{P}(^nX)$ і $k_1 + \cdots + k_m = m$. Тоді*

$$\|P\| \le \|B^P_{k_1,\ldots,k_m}\| \le c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)\|P\|.$$

3 Структура множини максимальних ідеалів алгебри $H_b(X)$

Позначимо $A_n(X)$ замикання в рівномірній топології на обмежених множинах алгебри, породженої поліномами з $\mathcal{P}(^{\le n}X)$. Очевидно, що $A_1(X)\cap\mathcal{P}(^nX) = \mathcal{P}_c(^nX)$.

Нагадаймо, що радіус-функція $R(\varphi)$ функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ визначена як інфімум всіх $r > 0$ таких, що φ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі з центром в нулі і радіуса r. Згідно з [2], радіус-функцію можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n},$$

де $\varphi_n = \pi_n(\varphi)$ — звуження φ на простір n-однорідних поліномів. Ми будемо використовувати позначення M_b для множини характерів (які завжди можна утотожнити із замкненими максимальними ідеалами) алгебри $H_b(X)$

Лема 3.1. ([24]) *Нехай $\varphi \in H_b(X)'$. Припустимо, що для деякого фіксованого $m > 0$, $\varphi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^mX)\cap A_{m-1}(X)$ і $\varphi_m \ne 0$. Тоді існує функціонал $\psi \in M_b$ такий, що $\psi_k = 0$ для $k < m$ і $\psi_m = \varphi_m$. Крім цього для радіус-функції виконується рівність $R(\psi) = \|\varphi_m\|^{1/m}$.*

Для довільного фіксованого елемента $x \in X$, оператор зсуву τ_x визначається на $H_b(X)$ рівністю

$$(\tau_x f)(y) = f(y+x), \qquad f \in H_b(X).$$

Відомо, що $\tau_x f \in H_b(X)$ і для довільного фіксованого функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ функція

$$x \longrightarrow \varphi(\tau_x f), \qquad x \in X,$$

належить $H_b(X)$ (див. [2]).

Для довільних $\varphi, \theta \in H_b(X)'$ операція згортки $\varphi * \theta$ в $H_b(X)$ визначається рівністю

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(\theta(\tau_x f)), \qquad f \in H_b(X).$$

Нехай $\varphi, \theta \in M_b$. Згідно з [2], існує напрямленість $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ така, що

$$\varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha), \qquad \theta(P) = \lim_\beta P(y_\beta)$$

для кожного полінома P. Іншими словами, $x_\alpha \to \varphi$ і $y_\beta \to \theta$ в слабко поліноміальній топології. Таким чином, у цьому випадку ми можемо записати:

$$(\varphi * \theta)(P) = \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha + y_\beta)$$

для кожного полінома P. Зауважимо, що M_b є напівгрупою відносно операції згортки. Позначимо для скорочення $\varphi_1 * \cdots * \varphi_n$ через $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \varphi_k$.

Нехай I_k — мінімальний замкнений ідеал в $H_b(X)$, породжений всіма m-однорідними поліномами, $0 < m \le k$. Очевидно, що I_k є власним ідеалом (не містить одиниці) і тому міститься в деякому максимальному замкненому ідеалі (див. [20]). Позначимо

$$\Phi_k := \{\varphi \in M_b \ : \ \ker\varphi \supset I_k\}.$$

При цьому будемо вважати, що $\Phi_0 := M_b$. Функціонал $\delta(0)$, що є значенням в нулі, належить Φ_k для кожного k.

Наслідок 3.1. ([24]) *Якщо $A_m(X) \neq A_{m-1}(X)$ для деякого $m > 1$, тоді існує комплексний гомоморфізм $\psi \in \Phi_{m-1}$ такий, що $\psi \notin \Phi_m$.*

Зауважимо, що $A_1(c_0) = A_n(c_0)$ для кожного n, але $A_k(\ell_p) = A_m(\ell_p)$ для $k \neq m$ тоді і тільки тоді, коли $k < p$ і $m < p$ [15].

Для послідовності характерів $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset M_b$ таких, що $\varphi_n \in \Phi_{n-1}$, нескінченна згортка $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ лінійний мультиплікативних функціонал на алгебрі поліномів $\mathcal{P}(X)$ такий, що $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P) = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{k} \varphi_n(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^k X)$ для довільного натурального k. Цей мультиплікативних функціонал єдиним чином визначає деякий характер з M_b (який ми будемо позначати тим самим символом $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$) якщо він неперервний.

Як вже було відзначено, оператор δ відображає X в M_b, $\delta(x)(f) = f(x)$. Нехай оператор $\widetilde{\delta}$ є продовженням δ на X'', тобто $\widetilde{\delta}(x'')(f) = \widetilde{f}(x'')$ для кожного $x'' \in X''$.

Теорема 9. ([24]) *Існують послідовності спряжених просторів $(X_n)_{n=1}^\infty$ і відображень $\delta^{(n)} : X_n \to M_b$ такі, що $X_1 = X''$, $X_n = \mathcal{P}(^n X)' \cap I_{n-1}^\perp$, $\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$ і довільний комплексний гомоморфізм $\varphi \in M_b$ має зображення*

$$\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n) \tag{14}$$

для деякої послідовності $u_n \in X_n$.

Ми будемо позначати $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$ реалізацію M_b у вигляді простору послідовностей $\mathfrak{u} = (u_1, \dots, u_n, \dots)$, які породжують комплексні гомоморфізми на $H_b(X)$ за формулою (14).

Для спрощення позначень ми будемо писати $\widehat{P}(u_1, \dots, u_m)$ замість

$$\widehat{P}(u_1, \dots, u_m, 0, 0, \dots), \qquad u_j \in X_j.$$

Теорема 10. *Нехай P — деякий n-однорідний поліном. Для кожного фіксованого m, натуральних $k_1, \ldots, k_m$ таких, що $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = n$ існує відображення*

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m} \colon {}^{k_1}X_1 \times \cdots \times {}^{k_m}X_m \to \mathbb{C}$$

таке, що для кожного $1 \le j \le n$, $\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_m)$ є k_j-однорідним поліномом від змінної $u_j \in X_j$ при інших фіксованих $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_m$ і

$$\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m).$$

Крім того,

$$\big\|\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}\big\| \le c(k_1, X)c(2k_2, X)\cdots c(mk_m, X)\|P\|.$$

Доведення. Для $m = 1$ твердження теореми є очевидним. Припустимо, що воно виконується для $m-1$. Тоді

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m) &= \mathop{\ast}_{j=1}^{m} \delta^{(j)}(u_j)P = \Big[\Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)\Big) \ast \delta^{(m)}(u_m)\Big](P)\\
&= \delta^{(m)}(u_m)\Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)\tau_x(P)\Big)\\
&= \delta^{(m)}(u_m)\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k_1+\cdots+(m-1)k_{m-1}=n-i} \widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})\\
&+ P(x)\Big),
\end{aligned}$$

де $P_i(z) = \binom{n-i}{i} A_P(z^{n-i}, x^i)$ є $n-i$-однорідним поліномом для довільного x. Оскільки $\tau_x(P)(z) = \sum_i P_i(z)$ і функціонал $\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)$ є лінійним (від P), $\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ є i-однорідним поліномом від змінної x для кожного i, де елементи $u_1, \ldots, u_{m-1}$ зафіксовані. За означенням $\delta^m(u_m)$,

$$\delta^m(u_m)\Big(\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})\Big)$$

є i/m-однорідним поліномом, якщо i/m — натуральне і нулем, в іншому випадку. Аналогічно, $\delta^m(u_m)(P)$ є n/m-однорідним поліномом якщо n/m — натуральне і нулем, в іншому випадку. Отже, якщо $i = k_m m$, то

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \delta^m(u_m)\Big(\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})\Big)$$

і якщо $n = k_m m$, то

$$\widetilde{B}^P_{0,\ldots,0,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \delta^m(u_m)(P).$$

Оскільки X_j є підпростором $(\otimes^j_{s,\pi} X)''$, то для кожного $u_j \in X_j$ існує напрямленість $(w^j_{\alpha_j}) \subset \otimes^j_{s,\pi} X$ така, що $\|w^j_{\alpha_j}\| \le \|u_j\|$ і $w^j_{\alpha_j} \to u_j$ в $\ast$-слабкій топології простору $(\otimes^j_{s,\pi} X)''$. Таким чином,

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_m} B^P_{k_1,\ldots,k_m}(w^1_{\alpha_1}, \ldots, w^m_{\alpha_m}),$$

де $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ визначено формулою (13). Згідно з наслідком 2.2,

$$\left\|\widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}\right\| = \left\|B^P_{k_1,\dots,k_m}\right\| \le c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)\|P\|.$$

□

Для довільного натурального n позначимо $p(n)$ — число додатніх розв'язків діофантового рівняння

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n.$$

З комбінаторики добре відомо, що $p(n)$ дорівнює числу всіх розбиттів n на натуральні доданки і асимптотично

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}. \qquad (15)$$

Теорема 11. *Нехай* $\mathfrak{u} = (u_k)_{k=1}^\infty$ *— деяка послідовність елементів* $u_k \in X_k$*. Функціонал* $\mathfrak{u}$ *належить* $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$*, тобто,* $\varphi = \mathop{\circledast}\limits_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k) \in M_b$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sup\limits_k \|u_k\|^{1/k} < \infty$*. В цьому випадку*

$$\sup_k \|u_k\|^{1/k} \le R(\varphi) \le e \sup_k \|u_k\|^{1/k}. \qquad (16)$$

Доведення. Нехай $\sup_k \|u_k\|^{1/k} = r < \infty$ для деякого додатного r. Тоді $\|u_k\| \le r^k$. Для довільного $P \in \mathcal{P}(^nX)$, $\|P\| = 1$ маємо

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(P)\| &= \|\varphi(P)\| = \|\widehat{P}(u_1,\dots,u_n)\| \\
&= \Big\| \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n} \widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}(u_1,\dots,u_n) \Big\| \\
&\le \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \|\widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}(u_1,\dots,u_n)\| \\
&\le m_n \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \|u_1\|^{k_1}\cdots\|u_n\|^{k_n},
\end{aligned}$$

де

$$m_n = \max_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} [c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)].$$

Зауважимо, що

$$m_n \le \max_{s_1+\cdots+s_n=n} \frac{s_1^{s_1}\cdots s_n^{s_n}}{s_1!\cdots s_n!}.$$

Згідно з асимптотичною, формулою Стірленга,

$$\limsup_{n\to\infty} m_n^{1/n} \le e.$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
R(\varphi) &= \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n} \\
&\le e \limsup_{n\to\infty} (p(n) r^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n})^{1/n} = er \limsup_{n\to\infty} (p(n))^{1/n}.
\end{aligned}$$

Використовуючи асимптотичну формулу (15), отримуємо

$$R(\varphi) \le er = e \sup_k \|u_k\|^{1/k} < \infty.$$

Тому $\varphi \in M_b$.

З іншого боку, $\|u_k\| \le \|\varphi_{km}\|$ для кожного натурального m. Отже

$$\sup_k \|u_k\|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} \|\varphi_k\|^{1/k} = R(\varphi).$$

□

Для довільного елемента $\mathfrak{u} = (u_k)_{k=1}^{\infty} \in \widehat{\mathbb{X}}^{\infty}$ позначимо $\nu(\mathfrak{u}) := \sup \|u_k\|^{1/k}$.

Теорема 12. *Множина* $\widehat{\mathbb{X}}^{\infty}$ *є лінійним простором відносно операцій* $(u_k)_{k=1}^{\infty} + (v_k)_{k=1}^{\infty} := (u_k+v_k)_{k=1}^{\infty}$ *і* $\lambda(u_k)_{k=1}^{\infty} := (\lambda u_k)_{k=1}^{\infty}$ *та функція* $\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) := \nu(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})$ *є метрикою, інваріантною відносно трансляцій на* $\widehat{\mathbb{X}}^{\infty}$.

Доведення. Оскільки

$$\|u_k + v_k\|^{1/k} \le (\|u_k\| + \|v_k\|)^{1/k} \le \|u_k\|^{1/k} + \|v_k\|^{1/k},$$

то

$$\sup_k \|u_k + v_k\|^{1/k} \le \sup_k(\|u_k\|^{1/k} + \|v_k\|^{1/k}) \le \sup_k \|u_k\|^{1/k} + \sup_j \|v_j\|^{1/j}.$$

Тому

$$\nu(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) \le \nu(\mathfrak{u}) + \nu(\mathfrak{v}). \tag{17}$$

Крім того, якщо $|\lambda| \ge 1$, то

$$\nu(\lambda\mathfrak{u}) = \sup_k \|\lambda u_k\|^{1/k} \le \lambda \sup_k \|u_k\|^{1/k} = \lambda\nu(\mathfrak{u})$$

і якщо $|\lambda| \le 1$, то

$$\nu(\lambda\mathfrak{u}) \le \nu(\mathfrak{u}).$$

Тому $\widehat{\mathbb{X}}^{\infty}$ — лінійний простір. Поклавши у (17) $\mathfrak{u}-\mathfrak{w}$ замість $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{w}-\mathfrak{v}$ замість $\mathfrak{v}$ отримаємо нерівність трикутника для ρ:

$$\rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \le \rho(\mathfrak{u}, \mathfrak{w}) + \rho(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}).$$

Отже ρ — метрика. □

Зауважимо, що $(\widehat{\mathbb{X}}^{\infty}, \rho)$ не є топологічним лінійним простором тому, що множення на константу не є неперервною операцією. Справді, нехай $\nu(u_k) = a^k$, $a > 0$. Тоді $\mathfrak{u}(u_1, u_2, \dots) \in (\widehat{\mathbb{X}}^{\infty}, \rho)$ і для кожного $0 < \lambda \le 1$, $\nu(\lambda\mathfrak{u}) = a$, але $\nu(\lambda\mathfrak{u}) = 0$ при $\lambda = 0$.

4 Алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору

У цьому підрозділі ми досліджуємо множину максимальних ідеалів банахових алгебр аналітичних функцій на одиничній кулі B комплексного банахового простору X. Ми будемо розглядати наступні рівномірні алгебри: $H^\infty(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, $H^\infty_{uc}(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, які є рівномірно неперервні на $\overline{B}$, $H^\infty_c(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, неперервних на $\overline{B}$. Очевидно, що

$$H_b(X) \subset H^\infty_{uc}(B) \subset H^\infty_c(B) \subset H^\infty(B).$$

В [2] показано, що якщо X — нескінченновимірний банахів простір, то всі включення є власними.

Позначимо M_{uc}, M_c і M^∞ — множину максимальних ідеалів алгебр $H^\infty_{uc}(B)$, $H^\infty_c(B)$ і $H^\infty(B)$ відповідно. Згідно з [2],

$$M_{uc} = \{\varphi \in M_b \ : \ R(\varphi) \le 1\}. \tag{18}$$

Крім того, існує природна проекція $\varrho : M^\infty \to M_b$, що є звуженням функціоналів з M^∞ на $H_b(X)$, яка є бієкцією на множині тих $\varphi \in M^\infty$, для яких $R(\varphi) < 1$. Зокрема

$$M_{uc} \subset M_c \subset M^\infty. \tag{19}$$

Твердження 4.1. *Множини M_{uc}, M_c і M^∞ містять замкнені одиничні кулі просторів X_n для кожного n.*

Доведення. Згідно з лемою 3.1 для довільного $u_k \in X_k$, $R(u_k) \le 1$ тоді і тільки тоді, коли $\|u_k\| \le 1$. Тому, згідно з рівністю (18), одиничні кулі просторів X_n містяться в M_{uc}. З вкладень (19) випливає, що вони містяться в M_c і M^∞. □

Нагадаємо, що згідно з теоремою 9, X_n — спряжений простір до деякого простору W_n.

Лема 4.1. *Нехай $P_1, \dots, P_m \in W_n$, $|P_k(x)| < 1$ для $\|x\| < 1$, $k = 1, \dots, m$ і h — деяка функція з $H^\infty(\Delta^m)$, $\|h\| < a$, де Δ^m — одиничний диск в $\mathbb{C}^m$. Тоді існує функція $f \in H^\infty(B)$ така, що звуження $\widehat{f}$ на X_n збігається з $h(P_1, \dots, P_m)$ і $\|\widehat{f}\| < a$.*

Доведення. Оскільки простір $W_n = \mathcal{P}(^nX)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^nX))$, то ми можемо розглядати P_k як класи еквівалентності в просторі n-однорідних поліномів. Нехай Q_k — деякі представники елементів P_k в просторі $\mathcal{P}(^nX)$. Покладемо

$$f(x) := h(Q_1(x), \dots, Q_m(x)).$$

Внаслідок відкритості фактор-відображення ми можемо вибрати представники Q_k так, що $\|Q_k\| < 1$ і $\|f\| < a$. Тому $(Q_1(x), \dots, Q_m(x)) \in \Delta^m$ і $\|f\| \le \|h\| < a$. Отже $f \in H^\infty(B)$. За побудовою, звуження $\widehat{f}$ на X_n збігається з $h(P_1, \dots, P_m)$. □

Скажемо, що послідовність $(z_j) \subset M^\infty$ є *інтерполюючою послідовністю* для $H^\infty(B)$, якщо для довільної обмеженої послідовності $(\alpha_j) \in \ell_\infty$ існує функція $f \in H^\infty(B)$ така, що $\widehat{f}(z_j) = \alpha_j$, $1 \le j \le \infty$.

У [2, Теорема 10.5] доведено, що кожна послідовність з одиничної кулі X'', норма елементів якої збігається до одиниці, містить інтерполюючу підпослідовність для алгебри $H^\infty(B)$. Наступна теорема узагальнює цей результат, використовуючи аналогічну схему доведення.

Теорема 13. *Нехай (z_j) така послідовність з X_n, що $\|z_j\| \to 1$ при $j \to \infty$. Тоді (z_j) містить інтерполюючу підпослідовність для $H^\infty(B)$.*

Доведення. Переходячи, якщо потрібно, до підпослідовності в (z_j), виберемо послідовності $(P_j) \subset W_n$, $\|P_j\| < 1$, $0 < P_j(z_j)$, і r_j, $0 < r_j < 1$ та послідовність конформних відображень одиничного диску комплексного простору в праву півплощину (Ψ_j) так, що

$$\Psi_j(P_j(z_j)^j) = j, \qquad 0 < \Psi_j(0) < 1, \tag{20}$$

$r_j \to 1$ при $j \to \infty$,

$$\Psi_j(P_j(x)^j) < 1/2^j \text{ для довільного } x \in X_n,\ \|x\| < r_j. \tag{21}$$

Існування таких послідовностей випливає з того, що кожне конформне відображення Ψ_j повністю визначається значеннями в двох точках. Будемо брати r_j так, щоб

$$\sup_{\|x\|<r_j} P_j(x)^j < P_j(z_j)^j$$

і визначати Ψ_j з умов (20), (21).

Покладемо $h_j = \Psi_j \circ P_j^j$. Тоді $|h_j(x)| < 1/2^j$ для довільного $x \in X_n$, $\|x\| < r_j$. Визначимо

$$g_m = \frac{h_1 + \cdots + h_m - 1}{h_1 + \cdots + h_m + 1}.$$

Тоді послідовність функцій g_m обмежена за модулем одиницею і рівномірно збігається на довільній кулі з центром в нулі радіуса r, $0 < r < 1$ в X^n до деякої функції g. Згідно з лемою 4.1, функції g_m можна продовжити до деяких функцій $f_m \in H^\infty(B)$, $\|f_m\| < 1$, при цьому, внаслідок відкритості відображення $f_m \mapsto g_m$, послідовність f_m можна вибрати збіжною. Внаслідок повноти $f_m \in H^\infty(B)$ в топології рівномірної збіжності, послідовність (f_m) прямує до деякої функції $f \in H^\infty(B)$. Отже $|f(z_j)| \le 1$ для $j \ge 1$ і $f(z_j) \to 1$ при $j \to 1$. Нехай z_{j_k} — підпослідовність в z_j така, що $f(z_{j_k})$ — інтерполююча послідовність в $H^\infty(\Delta)$, де Δ — одиничний диск в $\mathbb{C}$. Існування такої послідовності випливає з відомої теореми Карлесона про інтерполяцію [18]. Тоді z_{j_k} — інтерполююча послідовність в $H^\infty(B)$. $\square$

Позначимо через ${}^n\pi$ неперервний проектор з $\widehat{\mathbb{X}}^\infty = M_b$ на X_n. З формули (18) видно, що ${}^n\pi(M_{uc}^\infty) = B_{X_n}$, де B_{X_n} — одинична куля в X_n. Оскільки простір поліномів є спільним для обох алгебр $H_{uc}^\infty(B)$ та $H^\infty(B)$, і алгебра $H_{uc}^\infty(B)$ є рівномірною границею поліномів, то ${}^n\pi(M^\infty) \subset {}^n\pi(M_{uc})$. З іншого боку, як було вже відзначено, множини M^∞ і

M_{uc} перетинаються по множині $\{\varphi \in M_b \ : \ R(\varphi) < 1\}$. Тому ${}^n\pi(M^\infty) \supset B_{X_n}$. Крім того, на множині $\{\varphi \in M_b \ : \ R(\varphi) < 1\}$ топологія Гельфанда $H^\infty(B)$ і $H^\infty_{uc}(B)$ збігаються і ця топологія збігається з $*$-слабкою на B_{X_n}. Тому ${}^n\pi$ є неперервним відображенням з $\{\varphi \in M^\infty \ : \ R(\varphi) < 1\}$ в B_{X_n} із $*$-слабкою топологією. Оскільки неперервний образ компакта — компакт і $\overline{B}_{X_n}$ — компакт в $*$-слабкій топології, то ${}^n\pi(M^\infty) = \overline{B}_{X_n}$.

Нехай $z \in \overline{B}_{X_n}$. Наростом множини M^∞ над точкою z будемо називати множину

$$M^\infty_z := ({}^n\pi)^{-1}(\{z\}).$$

Наступна теорема узагальнює результат із роботи [2], доведений для випадку $\overline{B}_{X_1} = \overline{B}_{X''}$.

Теорема 14. *Нехай X — нескінченновимірний банахів простір і для деякого n X_n є нетривіальним нескінченновимірним простором і відповідний йому простір W_n є спряженим. Тоді над кожною точкою $z \in X_n$, $\|z\| = 1$ лежить наріст M^∞_z, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. Якщо простір X_n — нескінченновимірний, тоді над кожною точкою $z \in \overline{B}_{X_n}$ лежить наріст M^∞_z, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай $\{z_j\}$ — послідовність в B_{X_n} така, що $z_j \to z$ в $*$-слабкій топології простору X_n і $\|z_j\| \to 1$ при $j \to \infty$. Якщо $\|z\| = 1$, то достатньо покласти $z_j = r_j z$ для числової послідовності $0 < r_j < 1$, $r_j \to 1$. Якщо $\|z\| < 1$, то в умовах теореми така послідовність існує [10]. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати за теоремою 13, що послідовність z_j — інтерполююча для $H^\infty(B)$. Тому замикання підмножини $\delta^{(n)}(z_j)$ в M^∞ гомеоморфне до $\beta(\mathbb{N})$. Оскільки z_j прямує до z в $*$-слабкій топології і ${}^n\pi$ — неперервне відображення з M^∞ в B_{X_n} із $*$-слабкою топологією, то ${}^n\pi$ відображає всі граничні точки послідовності (z_j) в z. Отже, наріст над точкою z містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. $\square$

Існування наросту, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, на множинні M^∞ зумовлене тим, що $H^\infty(B)$ містить замкнені підалгебри, ізоморфні до ℓ_∞ (які є завжди доповнювальними внаслідок ін'єтивності ℓ_∞). Відмінність від скінченновимірного випадку полягає в тому, що нарости знаходяться не тільки над точками межі, а й над внутрішніми точками множини одиничних куль B_{X_n}.

Література

1. R.M. Aron and P.D. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3–24.

2. R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.

3. R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic funtions*, Can. J. Math. **47** (1995), 673–683.

4. R.M. Aron, P. Galindo, D. Garcia and M. Maestre, *Regularity and algebras of analytic function in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 543–559.

5. R.M. Aron and J.B. Prolla, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 195–216.

6. T.K. Carne, B. Cole and T.W. Gamelin, *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 639–659.

7. A.M. Davie and T.W. Gamelin, *A theorem on polynomial-star approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351–356.

8. S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Mathematics Studies, vol. 57, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.

9. S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

10. J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

11. T.W. Gamelin, *Uniform algebras,* 2nd ed., Chelsea, New York, 1984.

12. T.W. Gamelin, *Analytic functions on Banach spaces*, in Complex Function Theory, Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994, 187–223.

13. D. García, M.L. Lourenço, M. Maestre and L.A. Moraes, *The spectrum of analytic mappings of bounded type*, J. Math. Anal. Appl. **245** (2000), 447–470.

14. D. García, M.L. Lourenço, L.A. Moraes and O.W. Paques, *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Mathem. **10** (1999), 393–406.

15. R. Gonzalo, *Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. App. **202** (1996), 379–397.

16. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaries*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

17. C.P. Gupta, *On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*, Notas de Matemática, vol. 37, IMPA, Rio de Janeiro, 1968.

18. L. Karleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **76** (1962), 547–559.

19. A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, Mathematics Studies, vol. 124, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 535 p.

20. J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

21. J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space*, Archiv der Mathematik **76** (2001), 292–298.

22. L. Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Erd. der Math., vol. 47, Springer-Verlag, New York, 1969.

23. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

24. A. Zagorodnyuk, *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.

25. A. Zagorodnyuk, *Spectra of Algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces,* Contemporary Math. **435** (2007), 381–394.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 2.12.2008

Zagorodnyuk A.V. *Algebras of analytic functions on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 15–34.

The paper contains a survey of the most important results about structures of spectra of algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces and some new results in this area. Also, we have some applications to interpolations in algebras of analytic functions on unit balls of Banach spaces.

Загороднюк А.В. *Алгебры аналитических функций на банаховых пространствах // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 15–34.

В работе сделано обзор основных результатов о структуре множества максимальных идеалов алгебры целых аналитических функций ограниченного типа на банаховом пространстве и доказано некоторые новые результаты в этой области. Получены применения к интерполяции в алгебрах аналитических функций в единичном шаре банахового пространства.