Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 512.538

Заторський Р.А., Малярчук О.Р.

НЕСКІНЧЕННІ ЛІНІЙНІ РЕКУРЕНТНІ РІВНЯННЯ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТИ

Заторський Р.А., Малярчук О.Р. *Нескінченні лінійні рекурентні рівняння та параперманенти // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 35–46.

При допомозі параперманентів трикутних матриць досліджуються нескінченні лінійні рекурентні рівняння.

Вступ

Незважаючи на широкі застосування рекурсій в різних областях математики, вони досі погано вивчені. Винятком, можливо, є лінійні однорідні та неоднорідні рекурентні співвідношення із сталими коефіцієнтами. Для них доведено ряд загальних теорем, зміст і доведення яких, з відомих причин, є аналогами відповідних теорем з теорії лінійних однорідних та неоднорідних систем рівнянь із сталими коефіцієнтами та теорії однорідних та неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Ці теореми стали класичними і широко використовуються. Проте, навіть для лінійних однорідних рекурентних рівнянь із змінними коефіцієнтами, загальні методи їх розв'язання та дослідження досі відсутні. Ще гірше вивчені нелінійні рекурсії. Тут взагалі відсутні загальні підходи до їх вивчення.

В [1] лінійні рекурентні рівняння k-го порядку досліджуються при допомозі апарату параперманентів трикутних матриць. Такий підхід дозволяє знайти розв'язки рекурентних рівнянь, уникаючи розв'язування відповідних характеристичних рівнянь. Деякі результати цієї роботи доповідалися на Міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве у Київському університеті [2].

Метою цієї статті є застосування апарату параперманентів та парадетермінантів трикутних матриць [3] до розв'язання нескінченних лінійних рекурентних рівнянь, які часто виникають у комбінаторному аналізі [4].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

1 Попередні відомості

Справедлива наступна теорема [1], яка істотно доповнює теорему Стенлі (див. [6], стор. 301).

Теорема 1. *Нехай задано два вектори*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *наступні три рівності рівносильні:*

1. Лінійне рекурентне рівняння $k-$*го порядку*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k},\ n = k, k+1, k+2, \ldots \tag{1}$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2,\ \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}.$$

2.

$$u_n = pper(A_n) = \left[\begin{array}{cccccccc} a_1c_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1c_2 & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \cdots & a_1c_{k-1} & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array}\right]_n,$$

тут поправки c_i *визначаються із рівностей*

$$c_i = b_i \left(\sum_{s=1}^{i} a_s b_{i-s}\right)^{-1} = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + \cdots + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}},$$

де $i = 1, \ldots, k-1;$

3.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i = \frac{1 + b_1\left(1 - \frac{1}{c_1}\right)z^1 + b_2\left(1 - \frac{1}{c_2}\right)z^2 + \ldots + b_{k-1}\left(1 - \frac{1}{c_{k-1}}\right)z^{k-1}}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k}.$$

$$u_0 = 1,\ u_i = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \cdots & a_1 \end{array}\right]_i,\ i = 1, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Початкові умови (2) для рекурентного рівняння (1) назвемо *нормальними початковими умовами*, а послідовність, що генерується рекурентним співвідношенням — *нормальною послідовністю.*

Наслідок 1.1. *Нехай задано два вектори*

$$a=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k),$$

$$b=(b_0=1,b_1,b_2,\ldots,b_{k-1}),$$

де $b_i=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}_i$, $i=1,\ldots,k-1$.

Для нормальної послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ наступні три рівності рівносильні:

1. Лінійне рекурентне рівняння $k-$го порядку

$$u_n=a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+a_3u_{n-3}+\ldots+a_ku_{n-k},\ n=k,k+1,k+2,\ldots$$

із початковими умовами

$$u_0=b_0=1,u_1=b_1,u_2=b_2,\ \ldots,u_{k-1}=b_{k-1}.$$

2.

$$u_n=\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_n,\ n=1,2,3,\ldots.$$

3.

$$\frac{1}{1-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_kx^k}=1+\sum_{i=1}^{\infty}u_ix^i.$$

2 Нескінченні лінійні рекурентні рівняння

У цьому пункті ми розглянемо нескінченновимірний аналог наслідку 1.1 теореми 1 та за даною числовою послідовністю побудуємо лінійне рекурентне рівняння, яке ця послідовність задовольняє.

Наслідок 1.1 справедливий також на випадок нескінченновимірного вектора

$$a=(a_1,a_2,a_3,\ldots),$$

тобто справедлива наступна теорема:

Теорема 2. *Нехай маємо вектор*

$$a=(a_1,a_2,a_3,\ldots).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ наступні рівності рівносильні:

1.

$$u_0 = 1,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

2.

$$u_0 = 1,\ u_1 = [a_1],\ u_2 = \begin{bmatrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}, \ldots,$$

3.

$$\frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i.$$

Доведення. Рівносильність рівностей п.1 і п.2 стає очевидною після послідовного розкладу параперманентів із п.2 за елементами останнього рядка.

Рівносильність рівностей першого і третього пунктів випливає із рівності

$$(1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \ldots - a_i u_0) z^i,$$

яка можлива лише тоді, коли виконуються рівності

$$u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \ldots - a_i u_0 = 0,\ i = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Зауваження 2.1. *Матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & a_1 & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

назвемо матрицею нескінченного лінійного рекурентного рівняння (3).

Приклад 2.1. *Нехай маємо вектор*

$$a = (3, -4, 4, -4, 4, -4, 4, \ldots),$$

тоді для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $u_0 = 1$ рівносильні наступні рівності:

1.

$$u_n = 3u_{n-1} - 4u_{n-2} + 4u_{n-3} - 4u_{n-4} + 4u_{n-5} - 4u_{n-6} + \ldots, \tag{4}$$

2.

$$u_n = \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ \frac{-4}{4} & \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{(-1)^{n-1}4}{(-1)^{n-2}4} & \frac{(-1)^{n-2}4}{(-1)^{n-3}4} & \frac{(-1)^{n-3}4}{(-1)^{n-4}4} & \frac{(-1)^{n-4}4}{(-1)^{n-5}4} & \cdots & 3 \end{bmatrix}_n =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ -1 & -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 3 \end{bmatrix}_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{array} \right\rangle_n,$$

де $n = 1, 2, \ldots,$

3.

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 4z^2 - 4z^3 + 4z^4 - 4z^5 + \ldots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) z^i.$$

Із рекурентного рівняння (4) легко знайти загальний член послідовності u_n, $n = 1, 2, \ldots$. *Дійсно,*

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 = 3, \\ u_2 &= 3u_1 - 4u_0 = 5, \\ u_3 &= 3u_2 - 4u_1 + 4u_0 = 7, \\ u_4 &= 3u_3 - 4u_2 + 4u_1 - 4u_0 = 9. \end{aligned}$$

Очевидно, ми маємо справу із послідовністю непарних чисел. Припустимо, що $u_k = 2k+1$. *Згідно із припущенням повинна виконуватись рівність*

$$2k + 1 = 3(2k-1) - 4(2k-3) + 4(2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2} 4 \cdot 3 + (-1)^{k-1} 4 \cdot 1,$$

справедливість якої випливає із того, що

$$4((2k-1) - (2k-3) + (2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2} \cdot 3 + (-1)^{k-1} \cdot 1) = 4k.$$

Отже, наше припущення справедливе і, таким чином, встановлено правильність рівності

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{array} \right\rangle_n = 2n + 1,$$

яку безпосередньо встановити важче.

Відмітимо також, що генератрису для цієї послідовності можна спростити:

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + z - 4z(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) = 1 + z - \frac{4z}{1+z} = \frac{1 - 2z + z^2}{1+z}.$$

Отже,

$$f(z) = \frac{1+z}{1 - 2z + z^2} \tag{5}$$

Тепер, за виглядом генератриси (5) можна спростити і саме рекурентне рівняння. Остаточно отримаємо лінійне рекурентне рівняння другого порядку

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1, u_1 = 3.$$

Якщо задана деяка послідовність, то можна знайти рекурентне рівняння, якому задовольняють члени цієї послідовності, та її генератрису. Але, розв'язуючи задачі такого типу, ми будемо apriori вважати, що послідовність є нормальною.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 3. *Члени нормальної послідовності*

$$u_0 = 1, u_1, u_2, \ldots \tag{6}$$

задовольняють лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots,$$

де

$$a_i = (-1)^{i-1} \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \cdots & u_1 \end{array} \right\rangle, \; i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Доведення. Позаяк, послідовність (6) нормальна, то, згідно з наслідком 1.1, справедливі рівності

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{array} \right]_i = u_i, \; i = 1, 2, \ldots,$$

з яких можна знайти коефіцієнти a_i, $i = 1, 2, \ldots$ лінійного рекурентного рівняння (3). Але ця система, згідно з [5], має розв'язок

$$a_i = (-1)^{i-1} \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \cdots & u_1 \end{array} \right\rangle, \; i = 1, 2, \ldots.$$

□

Проілюструємо теорему 3 на прикладі.

Приклад 2.2. *Знайдемо рекурентні рівняння, які задовольняють числові послідовності:*

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_4 = 4, \dots,$$

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, \dots, \tag{8}$$

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 4, u_3 = 5, \dots. \tag{9}$$

Знаходимо коефіцієнти рекурентного рівняння за формулою (7).

$$a_1 = (-1)^0 \langle 2 \rangle = 2,\ a_2 = (-1)^1 \left\langle \begin{matrix} 2 & \\ \frac{3}{2} & 2 \end{matrix} \right\rangle = -1,\ a_3 = (-1)^2 \left\langle \begin{matrix} 2 & & \\ \frac{3}{2} & 2 & \\ \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 \end{matrix} \right\rangle = 0.$$

Припустимо, що $a_3 = a_4 = \dots = a_{k-1} = 0$, *тоді*

$$a_k = (-1)^{k-1} \left\langle \begin{matrix} 2 & & & \\ \frac{3}{2} & 2 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{k+1}{k} & \frac{k}{k-1} & \dots & 2 \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{k-1}(2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + \dots + (-1)^{k-1}(k-1) \cdot 1 +$$

$$(-1)^k k \cdot 2 + (-1)^{k+1}(k+1) \cdot 1) = 0.$$

Отже, маємо $a_1 = 2, a_2 = -1$ *і дана числова послідовність задовольняє лінійне рекурентне рівняння*

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Легко показати, що для числової послідовності (8) коефіцієнти відповідного рекурентного рівняння мають вигляд

$$a_r = \left\langle \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant r} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r = 3s, \\ 1, & \text{якщо } r = 3s+1, \\ -1, & \text{якщо } r = 3s+2, \end{cases} , s = 0, 1, \dots.$$

Отже, послідовність (8) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4} - u_{n-5} + u_{n-7} + u_{n-8} - u_{n-10} - u_{n-11} + \dots,$$

і її генератрисою є функція виду

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^7 - z^8 + z^{10} + z^{11} - \dots}.$$

Позаяк

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots) - z^2(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots) = \frac{1 - z - z^2 + z^3}{1 + z^3},$$

то

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{1 - z - z^2 + z^3}.$$

Коефіцієнти рекурентного рівняння, яке задовольняє числова послідовність (9) дорівнюють

$$a_i = (-1)^{i-1} F_{i+2},\ i = 1, 2, \dots,$$

де F_n — числа Фібоначчі.

Отже, числова послідовність (9) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = 3u_{n-1} - 5u_{n-2} + 8u_{n-3} - 13u_{n-4} + \dots .$$

Цьому нескінченному рекурентному рівнянню відповідає генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 5z^2 - 8z^3 + 13z^4 - \dots}.$$

Тому

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i+2) z^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (F(i+1) + F(i)) z^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i+1) z^i +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i) z^i = 1 - z \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} F(i+1) z^{i-1} + z^2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-2} F(i) z^{i-2} =$$

$$1 - z \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i F(i+2) z^i + z^2 \sum_{i=-1}^{\infty} (-1)^i F(i+2) z^i =$$

$$1 - z \left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2 \left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right).$$

Звідси

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z \left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2 \left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right)$$

або остаточно

$$f(z) = \frac{1 + z - z^2}{1 - 2z + z^2}.$$

Таким чином, в трьох розглянутих випадках, незначні зміни у перших членах числової послідовності приводять до істотно різних рекурентних рівнянь.

В комбінаторному аналізі зустрічається важлива числова послідовність $p(n)$ чисел невпорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні числа. Запишемо перші 25 членів генератриси цієї послідовності.

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+$$

$$176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1255x^{23}+1575x^{24}+\dots$$

Знайдемо перші 24 коефіцієнти шуканого рекурентного рівняння за формулою (7):

$$1, 1, 0, 0, -1, 0 - 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, \dots,$$

і кілька перших ненульових членів шуканого рекурентного рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-5} - u_{n-7} + u_{n-12} + u_{n-15} - u_{n-22} - \dots . \qquad (10)$$

Таким чином, ми отримали достатньо індуктивного матеріалу, щоб знайти закон, якому підпорядковується права частина рекурентного рівняння. Ойлер показав (див. [7], стор. 246), що загальний член цього рекурентного рівняння має вигляд

$$u_{n-\frac{3k^2-k}{2}} + u_{n-\frac{3k^2+k}{2}}, \; k = 1, 2, 3, \dots .$$

Зауважимо, що початковою умовою для знаходження числа невпорядкованих розбиттів натурального числа на натуральні доданки є співвідношення

$$p(0) = 1, \; p(m) = 0, \; m < 0.$$

Слід також відзначити, що число $\sigma(n)$, яке дорівнює сумі всіх натуральних дільників натурального числа n, також задовольняє рекурентне рівняння (10), але початкова умова має вигляд

$$\sigma(0) = n, \; \sigma(m) = 0, \; m < 0.$$

Розглянемо деякі випадки, в яких при допомозі нескінченного лінійного рекурентного рівняння, коефіцієнти якого задаються нескінченновимірним вектором, можна побудувати дробово раціональну генератрису, чисельник і знаменник якої є многочленами не вище k-того степеня.

Твердження 2.1. *Якщо нескінченновимірні вектори a, при допомозі яких задаються нескінченні рекурентні рівняння мають вигляд*

$$\begin{gathered} a = (a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, \dots), \\ a = (a_1, a_2, \dots, a_k, -a_1, -a_2, \dots, -a_k, a_1, \dots), \\ a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_k, a_1, a_2, \dots, a_k, -a_1, \dots), \end{gathered} \qquad (11)$$

то їм відповідають генератриси:

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1 - z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - (a_k + 1) z^k}, \\ f(z) = \frac{1 + z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - (a_k - 1) z^k}, \\ f(z) = \frac{1 + z^k}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + (a_k + 1) z^k}. \end{gathered} \qquad (12)$$

Доведення. Згідно із теоремою 2 нескінченному лінійному рекурентному рівнянню, що задається вектором (11) відповідає генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \dots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \dots}.$$

Тому маємо

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots =$$

$$1 - a_1 z(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - a_2 z^2(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - \ldots - a_k z^k(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) =$$

$$1 - \frac{a_1 z}{1+z^k} - \frac{a_2 z^2}{1+z^k} - \frac{a_k z^k}{1+z^k} = \frac{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k - 1) z^k}{1+z^k}.$$

Таким чином, ми отримуємо генератрису (12). Решта випадків аналогічні. □

У багатьох випадках корисною виявляється наступна теорема:

Теорема 4. *Нехай задано вектор*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

компоненти якого задовольняють рекурентне рівняння

$$a_n = \omega_1 a_{n-1} + \omega_2 a_{n-2} + \ldots + \omega_k a_{n-k}, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

де $a_0 = 1$. *Генератрисою послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, *яка задовольняє рекурентне рівняння*

$$u_0 = 1, \;\; u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots, \tag{13}$$

є функція $f(z)$ *виду*

$$\frac{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots - \omega_k z^k}{1 - (a_1 + \omega_1) z - \ldots - (a_{k-1} - \omega_1 a_{k-2} - \ldots - \omega_{k-2} a_1 + \omega_{k-1}) z^{k-1} - \omega_k z^k}.$$

Доведення. Згідно із твердженням 2, для послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ рекурентне рівняння (13) відповідає генератрисі

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots}.$$

Тому

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \sum_{n=k}^{\infty} (\omega_1 a_{n-1} + \omega_2 a_{n-2} + \ldots + \omega_k a_{n-k}) z^n =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \omega_1 z \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} - \omega_2 z^2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} - \ldots - \omega_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{n-k} =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \omega_1 z^1 \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n z^n - \omega_2 z^2 \sum_{n=k-2}^{\infty} a_n z^n - \ldots - \omega_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} + \omega_1 z \left(-1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-2} z^{k-2} + \frac{1}{f(z)} \right) +$$

$$\omega_2 z^2\left(-1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{k-3}z^{k-3}+\frac{1}{f(z)}\right)+\ldots+\omega_{k-1}z^{k-1}\left(-1+\frac{1}{f(z)}\right)+$$
$$\omega_k z^k\left(-1+\frac{1}{f(z)}\right).$$

Отже, маємо рівність

$$\frac{1}{f(z)}=$$
$$\frac{1-(a_1+\omega_1)z-\ldots-(a_{k-1}-\omega_1a_{k-2}-\ldots-\omega_{k-2}a_1+\omega_{k-1})z^{k-1}-2\omega_kz^k}{1-\omega_1z-\omega_2z^2-\omega_3z^3-\ldots-\omega_kz^k}.$$

□

Наведемо приклад, який ілюструє теорему 4.

Приклад 2.3. *Нехай задано нескінченне рекурентне рівняння*

$$u_n=u_{n-1}+3u_{n-2}+8u_{n-3}+21u_{n-4}+55u_{n-5}+\ldots+F_{2k-1}u_{n-k}+\ldots,$$

де F_n *— числа Фібоначчі. Коефіцієнти цього рівняння задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку*

$$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Отже, $\omega_1=3,\ \omega_2=-1$ *і генератриса числової послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$*, згідно із теоремою 4, має вигляд*

$$f(z)=\frac{1-3z+z^2}{1-4z+z^2}.$$

Висновок

Дослідження лінійних рекурентних рівнянь $k-$го порядку при допомозі параперманентів трикутних матриць можуть бути використані також при аналогічних дослідженнях нескінченних лінійних рекурентних рівнянь. При цьому можна виділити класи таких нескінченних лінійних рекурентних рівнянь, які зводяться до рівносильних лінійних рекурентних рівнянь k-го порядку, та побудувати для них відповідні генератриси.

Література

1. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications* // Algebra and Diskrete Mathematics. — 2007. — №1. — P. 109-138.

2. Заторський Р.А. *Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення* // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої сторіччю від початку роботи Д.О. Граве в Київському університеті. — Київ. — 2002. — С. 138.

3. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С. 3-17.

4. Эндрюс Г. Теория развиений. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 256 с.

5. Атаманюк О.Б., Заторський Р.А. *Застосування функцій трикутних матриць до розв'язання деяких систем рівнянь* // Матеріали міжнар. конф., присвяченої 125 річниці від дня народж. Ганса Гана. — Чернівці. — 2004. — С.7-8.

6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

7. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. — М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. — 315 с.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 12.11.2008

Zatorsky R.A., Malarchuk A.R. *The infinite linear recurrent equations and paradeterminants*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 35–46.

The infinite linear recurrent equations by means of parapermanents of triangular matrices are investigated.

Заторский Р.А., Малярчук А.Р. *Бесконечные линейные рекуррентные уравнения и параперманенты // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 35–46.

При помощи параперманентов треугольных матриц исследуются бесконечные линейные рекуррентные уравнения.