Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 513.88

Сторож О.Г.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ДВОМА ПАРАМИ ЛІНІЙНИХ ВІДНОШЕНЬ ТА ДИСИПАТИВНІ РОЗШИРЕННЯ ДЕЯКИХ НЕЩІЛЬНО ВИЗНАЧЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Сторож О.Г. *Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених симетричних операторів.* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 207–213.

Встановлено загальний вигляд максимально дисипативного відношення-розширення (зокрема, оператора-розширення) скінченновимірного нещільно визначеного звуження симетричного оператора з довільними дефектними числами.

1 Термінологія, основні позначення та додаткові твердження

Теорія лінійних відношень у гільбертовому просторі, започаткована Р. Аренсом [9], знайшла широкі застосування у багатьох галузях математики, зокрема, в теорії розширень лінійних операторів. Різноманітні питання цієї теорії досліджували Е.А. Кодінгтон [10], А. Дійксма та С.В. де Сну [11], А.В. Штраус [8], А.Н. Кочубей [4, 5], В.М. Брук [2] та інші математики.

У цій праці встановлено загальний вигляд максимально дисипативного відношення-розширення (зокрема, оператора-розширення) скінченновимірного (нещільно визначеного) звуження симетричного оператора з довільним індексом дефекту. Тим самим деякі результати А.Н. Кочубея [4] і автора [7] перенесено на ширші класи операторів. Крім цього, доведено одне твердження, що стосується теорії лінійних відношень, та наслідок з нього, які, можливо, мають самостійний інтерес.

Ми використовуємо такі позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та многовид нулів лінійного оператора T;

T^* – оператор, спряжений з оператором T;

$(\cdot|\cdot)$, $\oplus$, $\perp$ – символи скалярного добутку, ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно;

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47B44, 47B25.
Ключові слова і фрази: симетричний оператор, оператор-розширення, максимально дисипативне відношення-розширення, дефектні числа.

AE – образ множини E при відображенні A;

$\mathbb{I}_X$ – тотожне перетворення множини X;

$A \downarrow E$ – звуження відображення A на множину E;

якщо $X,\ Y$ – гільбертові простори, то під $\mathcal{C}(X),\ \mathcal{B}(X,Y)$ розуміємо класи лінійних замкнених щільно визначених операторів у просторі X та лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$таких, що $D(A){=}X$ відповідно.

Нехай H – комплесний гільбертів простір, а $H^2 \overset{def}{=} H{\oplus}H$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у просторі H називають довільний (замкнений) лінійний многовид $T \subset H^2$, а область визначення, область значень та спряжене відношення визначають таким чином:

$$D(T^*) = \{y \in H : (\exists z \in H)\ (y, z) \in T\}, \quad R(T) = \{z \in H : (\exists y \in H)\ (y, z) \in T\},$$

$$T^* = \left\{(y_2, z_2) \in H^2 :\ \forall\, (y_1, z_1) \in T \quad (z_1|y_2) - (y_1|z_2) = 0\right\}.$$

Легко бачити, що

$$T^* = (JT)^{\perp} = JT^{\perp}, \tag{1}$$

де

$$J(h_1, h_2) = (-ih_2,\ ih_1) \quad (h_1,\ h_2 \in H). \tag{2}$$

Відношення T називають симетричним або самоспряженим, якщо $T \subset T^*$ або $T = T^*$ відповідно. Його називають дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $(y, z) \in T, \quad Im(z|y) \geq 0\,(\leq 0)$ і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо воно, крім цього, не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень. Нагадаємо, також, що в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком.

2 Основні результати

Теорема 1. *Нехай L та L_0 – замкнені лінійні відношення в H, причому $L_0 \subset L$. Приймемо $M \overset{def}{=} L_0^*, \quad M_0 \overset{def}{=} L^*$ і визначимо підпростори $U \subset H^2, \quad V \subset H^2$, виходячи з рівностей $L = L_0 \oplus U, \quad M = M_0 \oplus V$. Тоді*

$$V = JU, \tag{3}$$

де J визначено згідно з (2).

Доведення. Зрозуміло, що тотожність $L_0^{\perp} \cap L = U$ можна переписати у вигляді $L_0^{\perp} = L^{\perp} \oplus U$. Оскільки J – унітарний оператор, то звідси випливає, що $JL_0^{\perp} = JL^{\perp} \oplus JU$. Беручи до уваги (1), бачимо, що $L_0^* = L^* \oplus JU$. Очевидно, що остання рівність та (3) рівносильні. □

Зауваження 1. *Нехай $L,\ L_0 \in \mathcal{C}(H)$, причому $L_0 \subset L$. Приймемо $M \overset{def}{=} L_0^*, \quad M_0 \overset{def}{=} L^*$ і визначимо підпростори H_L, H_M рівностями*

$$D(L) = D(L_0) \oplus_L H_L, \quad D(M) = D(M_0) \oplus_M H_M,$$

де $\oplus_T$ – символ суми, ортогональної відносно скалярного добутку графіка оператора T. В.Е. Лянце [6] довів, що в цьому випадку $H_M = LH_L$ і для будь-якого $u \in H_L, MLu = -u$.

Зрозуміло, що у випадку лінійних операторів теорема 1 та теорема В.Е. Лянце еквівалентні.

Наслідок 1. *Нехай $L_0 \in \mathcal{C}(H)$. Припустимо, що H_0 – скінченновимірний підпростір простору H і визначимо оператор S_0 за допомогою співвідношень:*

$$D(S_0) = D(L_0) \cap H_0^{\perp}, \quad S_0 \subset L_0.$$

Тоді

$$S_0^* = \{(y, L_0^* y + \varphi) : y \in D(L_0^*), \ \ \varphi \in H_0\} \overset{def}{=} G^*.$$

Доведення. Нехай $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ – база підпростору H_0 , і

$$\forall \alpha \in D(L_0) \ \ \Phi\alpha \overset{def}{=} ((\alpha|\varphi_1), ..., (\alpha|\varphi_r)), \quad l_\xi(\alpha) \overset{def}{=} (\alpha|\xi)_{L_0},$$

де $(\xi, L_0\xi) \in L_0 \cap S_0^{\perp}$ (нагадаємо, що ми ототожнюємо оператор з його графіком). Зрозуміло, що $\ker \Phi = D(S_0) \subset \ker l_\xi$, тому існують $c_1, ..., c_r \in \mathbb{C}$ такі, що

$$\forall \alpha \in D(L_0) \ \ (\alpha|\xi) + (L_0\alpha|L_0\xi) = \sum_{i=1}^{r} c_i(\alpha|\varphi_i).$$

Приймемо $\varphi = -\sum_{i=1}^{r} \bar{c}_i\varphi_i$. Маємо: $\forall \alpha \in D(L_0) \ \ (L_0\alpha|L_0\xi) = (\alpha| - \varphi - \xi)$. А це означає, що $L_0\xi \in D(L_0^*)$, $\ L_0^* L_0\xi = -\xi - \varphi$. Виходячи звідси і застосовуючи теорему 1 до пари L_0, S_0, бачимо, що $S_0^* \cap (L_0^*)^{\perp} = J[L_0 \cap S_0^{\perp}] \subset G^*$, а отже, $S_0^* \subset G^*$. Обернене твердження очевидне. □

Зауваження 2. *У випадку, коли оператор L_0 є симетричним, це твердження було доведено в [10].*

Зауваження 3. *У праці А.Н. Кочубея [5] було показано, що будь-яке дисипативне розширення S симетричного відношення S_0 задовольняє умову $S \subset S_0^*$. Наведемо інше доведення цього твердження.*

Нехай $(y, \ z) \in S$. Тоді для будь-яких $\alpha \in \mathbb{C}$, $(u, v) \in S_0$ $\ (u, v) + \alpha(y, z) = (u + \alpha y, v + \alpha z) \in S$. Оскільки $Im(v, u) = 0$, то $0 \le Im(v + \alpha z|u + \alpha y) = Im\left[\alpha(z|u) + \bar{\alpha}(v|y)\right] + Im\left(|\alpha|^2 (z|y)\right)$, а, отже, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \ \ Im\left[\alpha\left((z|u) - (y|v)\right)\right] + |\alpha|^2 Im(z|y) \ge 0$. Нехай $\alpha = |\alpha|\,\theta$, де $|\theta| = 1$. Маємо (скорочуючи на $|\alpha|$) $|\alpha|\, Im(z|y) + Im\left[\theta\left((z|u) - \ (y|v)\right)\right] \ge 0$.

Спрямовуючи $|\alpha|$ до нуля, отримуємо: $|\theta| = 1 \Rightarrow Im\left[\theta\left((z|u) - (y|v)\right)\right] \ge 0$. А це можливе тільки при $(z|u) - (y|v) = 0$. Таким чином, $\forall (u, v) \in S_0 \ (z|u) = (y|v)$, а отже, $(y|z) \in S_0^*$.

Нижче в термінах абстрактних крайових умов встановлено критерії максимальної дисипативності для відношень-розширень (зокрема, для операторів-розширень) оператора S_0, описаного в наслідку 1, у ситуації, коли L_0 – симетричний оператор: $L_0 \subset L_0^* \overset{def}{=} L$. Під $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, \delta_+, \delta_-)$ ми розуміємо фіксований антисиметричний простір граничних значень оператора L_0 (в сенсі означення, запропонованого в [7]), а під P_0 – ортопроектор $H \to H_0$.

Лема 1. *Для будь-яких $y \in D(L)$, $\varphi \in H_0$*

$$2Im(Ly+\varphi|y) = \left\| \left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y) \right) \right\|^2_{\mathcal{H}^+ \oplus H_0} - \left\| \left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y) \right) \right\|^2_{\mathcal{H}^- \oplus H_0}. \quad (4)$$

Дійсно,

$$2iIm(Ly+\varphi|y) = (Ly+\varphi|y) - (y|Ly+\varphi) = (Ly|y) - (y|Ly) + (\varphi|P_0 y) - (P_0 y|\varphi) =$$

$$i\left[(\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}^+} - (\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}^-}\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y) | \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y) \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y) | \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y) \right) \right].$$

Теорема 2. *Для будь-якого стиску $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$ підпростір, що складається з тих елементів $\{(y, Ly+\varphi)\} \subset S_0^*$, які задовольняють умову*

$$K\left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y) \right) - \left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y) \right) = 0, \quad (5)$$

є максимально дисипативним розширенням оператора S_0.

Навпаки, будь-яке максимально дисипативне відношення-розширення S оператора S_0 – це частина простору S_0^*, яка виділяється умовою (5).

Доведення. Будемо без додаткових роз'яснень використовувати основні положення теорії лінійних просторів з індефінітною метрикою, викладені, наприклад, в [1].

Введемо позначення : $G^{\pm} = \mathcal{H}^{\pm} \oplus H_0$, $G = G^+ \oplus G^-$,

$$I(h^+, h_1, h^-, h_2) = (h^+, h_1, -h^-, -h_2) \quad (h^{\pm} \in \mathcal{H}^{\pm}, h_1, h_2 \in H_0).$$

Зрозуміло, що $(G,\ I)$ є простором Крейна. Простором Крейна є також (H^2, J), де J визначено згідно з (2). Це випливає з рівностей $I = I^* = I^{-1}$, $J = J^* = J^{-1}$. Далі, рівність

$$(Jw|w) = 2Im\,(z|y)\,,\ \text{де } w = (y,z) \in H^2,$$

показує, що відношення S є дисипативним в H тоді і тільки тоді, коли S – невід'ємний лінеал в (H^2, J), а рівність (4) та зауваження 2 переконують, що у випадку, коли $S_0 \subset S \subset S_0^*$,

$$\left\{ \left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y), \delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y) \right) \in G : (y, Ly+\varphi) \in S \right\}$$

є невід'ємним лінеалом в $(G,\ I)$, причому максимальна дисипативність відношення S рівносильна максимальній невід'ємності відповідного лінеалу. Але, як доведено в цитованій вище монографії, лінеал $\mathcal{L}$ є максимальним невід'ємним в $(G,\ I)$ тоді і тільки тоді, коли існує оператор $K \in \mathcal{B}(G^+, G^-)$ такий, що $\|K\| \le 1$ і

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(h^+, h_1, h^-, h_2\right) \in G : K(h^+, h_1) = (h^-, h_2) \right\}.$$

Для завершення доведення досить прийняти до уваги зауваження 3. □

Зауваження 4. *Аналогічним чином фомулюються умови максимальної акумулятивності, симетричності, а у випадку, коли L_0 має однакові дефектні числа, – і самоспряженості розширення-відношення S оператора S_0 (пор. зі сказаним в [2 – 4]). Крім цього, застосовуючи міркування, наведені в [7], неважко переконатися в правильності такого твердження.*

Наслідок 2. *Лінійне відношення $S \supset S_0$ є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли існують оператори $A^{\pm} \in \mathcal{B}(G^{\pm}, G^{-})$ такі, що*

$$A^{+}(A^{+})^{*} \leq A^{-}(A^{-})^{*}, \quad \ker A^{-} = \{0\}\,,$$

а S складається з тих елементів $\{(y, Ly + \varphi)\} \subset S_0^{*}$, які задовольняють умову

$$A^{+}\left(\delta_{+}y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)\right) + A^{-}\left(\delta_{-}y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right) = 0.$$

Виділимо тепер з-поміж відношень S, описаних в теоремі 2, ті, які є операторами (ми ототожнюємо оператор та його графік), тобто опишемо максимально дисипативні оператори-розширення оператора S_0. Для цього позначимо через $\pi_1,\ \pi_2$ ортопроектори $G^{-} \to \mathcal{H}^{-},\ G^{-} \to H_0$ відповідно (маються на увазі ототожнення $\mathcal{H}^{-} \leftrightarrow \mathcal{H}^{-} \oplus \{0\},\ H_0 \leftrightarrow \{0\} \oplus H_0$) , а оператори $W : D(L) \to G^{-}$, $\Lambda : H_0 \to G^{-}$ визначимо таким чином:

$$\forall y \in D(L) \quad Wy = -\sqrt{2}\left(K(\delta_{+}y,\ \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + (\delta_{-}y,\ \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y)\right);$$

$$\forall h \in H_0 \quad \Lambda(0, h) = K(0, h) - (0, h).$$

Теорема 3. *В умовах теореми 2, S є (максимально дисипативним) оператором-розши ренням оператора S_0 тоді і тільки тоді, коли*

$$\ker \Lambda = \{0\}. \tag{6}$$

У цьому випадку

$$D(S) = \left\{y \in D(S_0^{*}) : Wy \in R(\Lambda),\ \pi_1 \Lambda^{-1} W y = 0\right\}, \tag{7}$$

$$\forall y \in D(S)\ \ Sy = Ly + \pi_2 \Lambda^{-1} W y. \tag{8}$$

Доведення. Перш за все, зазначимо, що відношення S є оператором тоді і тільки тоді, коли $S(0) \overset{def}{=} \{z \in H : (0, z) \in S\} = \{0\}$. Беручи до уваги (5), цю рівність можна переписати так:

$$\{\varphi \in H_0 : K(0, \varphi) = (0, \varphi)\} = \{0\}\,. \tag{9}$$

Зрозуміло, що умови (6) та (9) рівносильні.

Для знаходження $D(S)$ та φ подамо (5) таким чином:

$$K\left(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y\right) + K\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right) + \left(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y\right) - \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right) = 0,$$

тобто

$$\Lambda\left(0, \varphi\right) = Wy. \tag{10}$$

Іншими словами, $y \in D(S)$ тоді і тільки тоді, коли

$$Wy \in R(\Lambda) = D(\Lambda^{-1}), \tag{11}$$

і в цьому випадку $(0, \varphi) = \Lambda^{-1} Wy$, тобто

$$\pi_1 \Lambda^{-1} Wy = 0, \quad \pi_2 \Lambda^{-1} Wy = \varphi. \tag{12}$$

Ясно, що умови (11) – (12) рівносильні умовам (7) – (8). Теорему доведено. □

Приклад 1. *Нехай* $H_0 = \{0\}$, *тобто* $S_0 = L_0$. *У цьому випадку рівняння* (10) *набуває вигляду*

$$K\delta_+ y + \delta_- y = 0. \tag{13}$$

Тому будь-яке максимально дисипативне розширення оператора L_0 *являє собою звуження оператора* L, *яке визначається умовою* (13), *де* $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-)$ *– деякий стиск. Це цілком узгоджується з результатами праці [7].*

Приклад 2. *Нехай стиск* K, *за допомогою якого визначається максимально дисипативний оператор* (7) – (8), *має "діагональний" вигляд, тобто*

$$\forall h \in \mathcal{H}^+,\ \forall \varphi \in H_0 \quad K(h, \varphi) = K_1 h + K_2 \varphi \ \left(K_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-),\ K_2 \in \mathcal{B}(H_0)\right).$$

Як показують прямі обчислення, в цьому випадку рівняння (10) *еквівілентне системі*

$$\begin{cases} K_1 \delta_+ y + \delta_- y = 0 \\ (K_2 - \mathbb{I}_{H_0})\varphi = \frac{i}{\sqrt{2}}(K_2 + \mathbb{I}_{H_0}) P_0 y, \end{cases},$$

тобто

$$D(S) = \left\{y \in D(L) : K_1 \delta_+ y + \delta_- y = 0\right\},$$

$$\forall y \in D(S),\ Sy = Ly + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(K_2 - \mathbb{I}_{H_0}\right)^{-1}\left(K_2 + \mathbb{I}_{H_0}\right) P_0 y.$$

Таким чином, S *– адитивне збурення деякого розширення оператора* L_0.

Література

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.

2. Брук В.М. *О расширенях симметрических отношений* // Мат. заметки. – 1977. – Т.22, №6. – С. 825-834.

3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

4. Кочубей А.Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Мат. заметки. – 1975. – Т.17, №1. – С. 41-48.

5. Кочубей А.Н. *О расширениях неплотно заданного симметрического оператора* // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т.18, №2. – С. 314-320.

6. Лянце В.Э. *О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами* // Докл. АН СССР. – 1972. – Т.204, №3. – С. 542-545.

7. Сторож О.Г. *О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами* // Мат. заметки. – 1984. – Т.36, №5. – С. 791-796.

8. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* // Изв. АН СССР. – 1968. – Т.32, №1. – С. 186-207.

9. Arens R. *Operational calculus of linear relations,* Pacif. J. Math., **11**, 1 (1961), 9-23.

10. Coddington E.A. *Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear operators,* Bull. Amer. Math. Soc., **79**, 4 (1973), 712-715.

11. Dijksma A., de Snoo H.S. *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces,* Pacif. J. Math., **54**, 1 (1974), 71-100.

Львівський національний університет ім. I. Франка,
Львів, Україна.

Надійшло 30.10.2009

Storozh O.G. *A correlation between two pairs of linear relations and dissipative extensions of some nondensely defined symmetric operators.*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 207–213.

A general form of a maximal dissipative subspace extension (in particularly of an operator extension) of a finite-dimensional nondensely defined restriction of a symmetric operator with arbitrary defect numbers is established.

Сторож О.Г. *Связь между двумя парами линейных отношений и диссипативные расширения некоторых неплотно определенных симметрических операторов.* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 207–213.

Установлен общий вид максимально диссипативного отношения-расширения (в частности, оператора-расширения) конечномерного неплотно определенного сужения симметрического оператора с произвольными дефектными числами.