

І.В. Гуцул, В.І. Гуцул

Нестационарний розподіл температури та термоелектрорушійна сила анізотропного оптикотермоелемента при антипаралельних напрямках градієнта температури і променевого потоку

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 58012 вул. Коцюбинського, 2,
Чернівці, Україна, e-mail: ktf@chnu.edu.ua

У роботі розглянуто можливості використання анізотропних оптикотермоелементів з різною величиною оптичної прозорості для реєстрації та перетворення високоінтенсивних променивих потоків. Наведено розв'язок нестационарного неоднорідного рівняння теплопровідності з урахуванням закону Бугера-Ламберта при антипаралельних напрямках променевого потоку та градієнта температури анізотропної пластини $ZnAs_2$. Показано, що нестационарний розподіл температури визначається анізотропією теплопровідності та оптичними властивостями матеріалу термоелемента і має складну нелінійну залежність як від координати так і часу. Отримано вирази поперечної термоелектрорушійної сили для випадків оптичного пропускання та поверхневого поглинання. Досліджено залежності поперечної термоерс від часу і висоти термоелемента.

Ключові слова: поперечна термоелектрорушійна сила, коефіцієнт термоерс, коефіцієнт теплопровідності, анізотропний оптикотермоелемент, термостат, рівняння теплопровідності, закон Бугера-Ламберта.

Стаття постуила до редакції 09.09.2014; прийнята до друку 15.12.2014.

Кінетичні ефекти зумовлюють термоелектричні властивості анізотропних середовищ. Останнім часом зріс інтерес до нестатичних процесів в анізотропних напівпровідниках. Це викликано проблемами дослідження механізмів релаксації енергії. Одним із методів збудження нестационарних теплових потоків у кристалах є генерування в них температурних хвиль. Внаслідок опромінення речовина поглинає енергію, яка перетворюється в нестационарні теплові потоки із змінною у просторі та часі температурою, дослідження якої дозволяє отримати інформацію про термоелектричні, оптичні та інші властивості кристалів. З іншого боку, існують джерела, енергію яких важко реєструвати через значний перегрів термочувливих датчиків. У зв'язку з цим ведеться інтенсивне дослідження можливостей анізотропних середовищ для реєстрації та перетворення високоінтенсивних променивих потоків. Для розв'язання цієї проблеми запропоновано використовувати середовища з різною величиною оптичної прозорості [1]. Це, в свою чергу, привело до появи нового методу реєстрації променивих потоків, названого методом «прозорі стінки», який базується на частковому поглинанні прохідного випромінювання оптично прозорими середовищами з одночасним перетворенням поглинутої частини

енергії. Аналіз показує, що реалізація цього методу є перспективною у випадку виникнення поперечної термоерс, зумовленої анізотропією коефіцієнтів термоерс [2] і теплопровідності [3]. Цим дослідженням присвячено ряд робіт [4-7], де на основі рівнянь теплопровідності з відповідними крайовими умовами розглянуті конкретні розподіли температур і термоелектричних потенціалів анізотропних кристалів, що послужило появі оригінальних анізотропних оптикотермоелементів (АОТ) [8, 9]. Вибір конкретних АОТ і необхідних режимів роботи визначається умовами експлуатації і залежить як від параметрів використовуваних матеріалів, так і від взаємних напрямів поширення променевого потоку і градієнта температури відносно вибраних кристалографічних орієнтацій матеріалу.

У даній роботі розглядається АОТ (рис. 1) у вигляді прямокутної пластини довжиною a , висотою b та шириною c , виготовленої з матеріалу, анізотропного за коефіцієнтами теплопровідності χ і термоерс α . Ці тензори в лабораторній системі координат (XYZ), повернутій на кут φ у площині XOY відносно кристалографічної (X'Y'Z') системи, мають вигляд

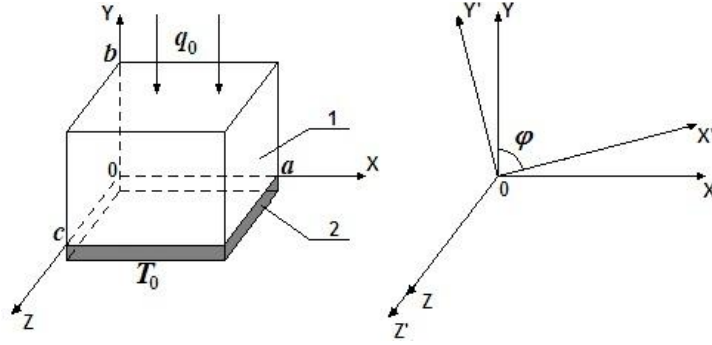


Рис. 1. Схема АОТ: анізотропна пластина 1; термостат 2. Справа – лабораторна система координат XYZ і орієнтація кристалграфічних осей X'Y'Z' пластины 1.

$$c = \begin{vmatrix} c_{\parallel} \sin^2 \varphi + c_{\perp} \cos^2 \varphi & (c_{\parallel} - c_{\perp}) \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ (c_{\parallel} - c_{\perp}) \sin \varphi \cos \varphi & c_{\parallel} \cos^2 \varphi + c_{\perp} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & c_{\perp} \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$a = \begin{vmatrix} a_{\parallel} \sin^2 \varphi + a_{\perp} \cos^2 \varphi & (a_{\parallel} - a_{\perp}) \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ (a_{\parallel} - a_{\perp}) \sin \varphi \cos \varphi & a_{\parallel} \cos^2 \varphi + a_{\perp} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & a_{\perp} \end{vmatrix} \quad (2)$$

де c_{\parallel} , c_{\perp} і a_{\parallel} , a_{\perp} – компоненти тензорів c та a .

На верхню грань цієї пластины падає однорідний монохроматичний променевий потік густиною q_0 , який зумовлює у пластині появу градієнта температури і однозначно зв'язаної з ним поперечної термоерс. Нижня грань АОТ знаходиться в теплооптичному контакті з термостатом 2 при температурі $T = T_0$. Термостат 2 виготовлений із ізотропного матеріалу, оптичний спектральний діапазон якого збігається з відповідним діапазоном прозорості матеріалу АОТ. Бокові грані АОТ адіабатично ізолювані та при цьому не враховуються крайові ефекти ($a = c \gg b$) [3].

Розподіл температури АОТ знаходиться з основного рівняння теплопровідності [10] при наявності внутрішніх джерел тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_0 d} \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{q_v}{C_0 d}, \quad (3)$$

де C_0 – питома теплоємність, d – густина матеріалу АОТ, c_{ik} – компоненти тензора теплопровідності, q_v – кількість тепла, яка виділяється внутрішніми джерелами в одиниці об'єму за одиницю часу і визначається законом Бугера-Ламберта.

Для нестационарного розподілу температури в наближенні

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad c_{12} < c_{22}$$

рівняння теплопровідності (3) має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + B e^{-g(b-y)}, \quad (4)$$

де $A^2 = \frac{c_{22}}{C_0 d}$, $B = \frac{q_0 g}{C_0 d}$, g – коефіцієнт поглинання матеріалу АОТ.

Розв'язок рівняння (4) при крайових і початковій умовах

$$T|_{y=0} = T_0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = 0; \quad T|_{t=0} = T_0 \quad (5)$$

будемо шукати у вигляді

$$T(y, t) = T_0 + U(y, t). \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (4), отримуємо задачу теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + B e^{-g(b-y)} \quad (7)$$

для функції $U(y, t)$ за однорідними крайовими і початковою умовами

$$U|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=b} = 0; \quad U|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Загальний розв'язок рівняння (7) знаходимо у вигляді суми загального розв'язку однорідного і

часткового розв'язку неоднорідного рівнянь (7), тобто

$$U(y,t) = U_{одн}(y,t) + U_{неодн}(y,t). \quad (9)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (7) за нульовими крайовими умовами приводить до задачі Штурма-Ліувіля, власною функцією якої є функція

$$\sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right],$$

$$I_n = \frac{(2n+1)p}{2b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

. Розв'язок неоднорідної (7)-(8) задачі шукаємо у вигляді розкладу в ряд Фур'є за власними функціями $\sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right]$ однорідної задачі:

$$U(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right]. \quad (10)$$

Підставляючи (10) та розклад неоднорідності

рівняння теплопровідності (7) в ряд Фур'є за власними функціями однорідної задачі, одержимо рівняння для знаходження $F_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_n'(t) + \left[\frac{(2n+1)p}{2b} A \right]^2 F_n(t) - f_n \right\} \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right] = 0, \quad (11)$$

Отриману рівність можна розглядати як розклад нуль-функції в ряд Фур'є за власними функціями

$$\sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right], \quad \text{де } f_n = \frac{2b}{b^2} \int_0^b B e^{-g(b-y)} \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right] dy.$$

Підставивши розв'язок $F_n(t)$ рівняння (11) у рівняння (10) одержимо розв'язок задачі теплопровідності (7)-(8) у такому вигляді

$$U(y,t) = \int_0^t dt \int_0^b \left[\frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left[\frac{(2n+1)p}{2b}A\right]^2(t-t)\right] \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right] \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}x\right] B e^{-g(b-x)} \right] dx \quad (12)$$

Перепишемо (12), ввівши функцію Гріна або функцію впливу миттєвого точкового джерела тепла

$$G(y,x,t-t) = \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left[\frac{(2n+1)p}{2b}A\right]^2(t-t)\right] \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}y\right] \sin\left[\frac{(2n+1)p}{2b}x\right]. \quad (13)$$

Тоді для розв'язку (12) одержимо вираз

$$U(y,t) = \int_0^t dt \int_0^b G(y,x,t-t) B e^{-g(b-x)} dx. \quad (14)$$

Підставивши (14) у (6), одержимо після інтегрування кінцевий вираз для нестационарного розподілу температури

$$T(y,t) = T_0 + \frac{2q_0g}{bc_{22}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n g + \frac{(2n+1)p}{2b} e^{-gb} \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 p^2 c_{22} t}{4 C_0 d b^2}\right) \right]}{\left[g^2 + \left(\frac{(2n+1)p}{2b}\right)^2 \right] \left(\frac{(2n+1)p}{2b}\right)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)p}{2b}y\right). \quad (15)$$

Аналіз співвідношення (15) показує, що нестационарний розподіл температури $T(y,t)$ має складну нелінійну залежність від координати y та часу t і залежить як від анізотропії теплопровідності, так і від оптичних властивостей матеріалу АОТ.

На рис. 2 подано графік розподілу температурного поля $\Delta T(y,t) = T(y,t) - T_0$ для АОТ, виготовленого із ZnAs_2 , у випадку оптичного пропускання ($gb \ll 1$), а на рис. 3 – у випадку поверхневого поглинання ($gb \gg 1$).

Компоненти вектора напруженості термоелектричного поля E_i^T визначаються наступним співвідношенням

$$E_i^T = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16)$$

Підставивши (15) в (16), одержимо

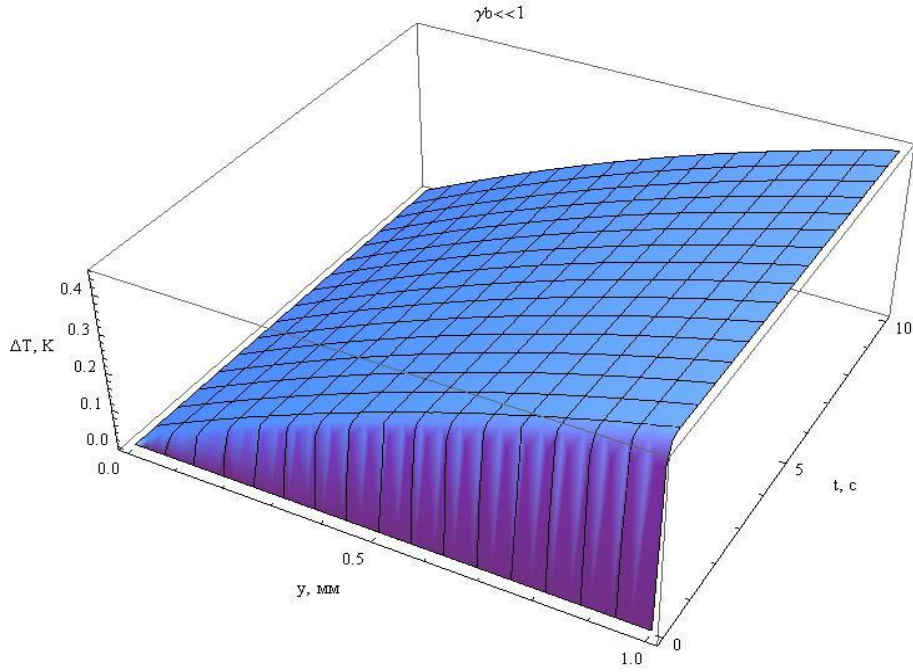


Рис. 2. Розподіл температурного поля АОТ із ZnAs₂ у випадку оптичного пропускання ($\gamma b \ll 1$).

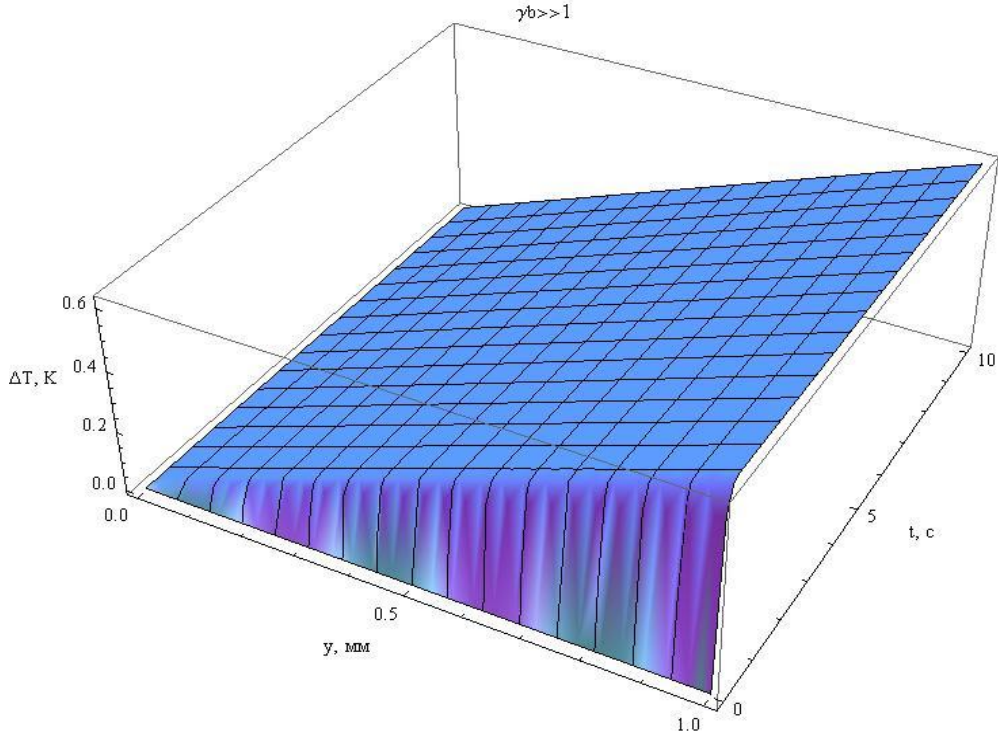


Рис. 3. Розподіл температурного поля АОТ із ZnAs₂ у випадку поверхневого поглинання ($\gamma b \gg 1$).

$$E_1^T = E_x^T = \frac{2q_0 g a_{12}}{bc_{22}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n g + \frac{(2n+1)p}{2b} e^{-gb} \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 p^2 c_{22} t}{4C_0 d b^2} \right) \right]}{\left[g^2 + \left(\frac{(2n+1)p}{2b} \right)^2 \right] \frac{(2n+1)p}{2b}} \cos\left(\frac{(2n+1)p}{2b} y \right). \quad (17)$$

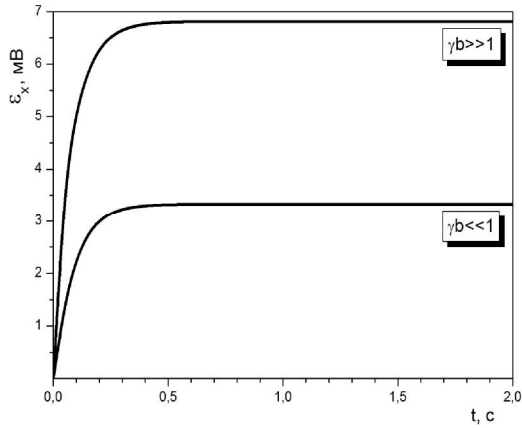


Рис. 4. Залежності поперечної термоерс ε_x АОТ із ZnAs₂ у випадках оптичного пропускання ($\gamma b \ll 1$) та поверхневого поглинання ($\gamma b \gg 1$) від часу t при термостатуванні нижньої робочої грані (для $b = 1$ мм).

Згідно з [5] поперечна термоелектрорушійна сила e_x визначається наступним співвідношенням

$$e_x = \frac{1}{bc} \int_0^c dy \int_0^a dz \int_0^T E_x dx. \quad (18)$$

Підставляючи (17) у (18), одержимо після інтегрування вираз для поперечної термоелектрорушійної сили e_x розглядуваного АОТ у вигляді

$$e_x(t) = \frac{2q_0 g a a_{12}}{c_{22}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[g + (-1)^n \frac{(2n+1)p}{2b} e^{-gb} \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 p^2 c_{22} t}{4C_0 d b^2} \right) \right]}{\left[g^2 + \left(\frac{(2n+1)p}{2b} \right)^2 \right] \left(\frac{(2n+1)p}{2} \right)^2}. \quad (19)$$

На рис. 4 зображено графіки залежності поперечної до променевого потоку термоерс e_x від часу t у випадках оптичного пропускання ($gb \ll 1$) та поверхневого поглинання ($gb \gg 1$). Встановлено, що з ростом часу t як у випадках оптичного пропускання, так і поверхневого поглинання, поперечна термоерс зростає і при певному значенні t

досягає постійної величини. Крім цього, e_x у випадку поверхневого поглинання характеризується більшими за величиною значеннями, ніж при оптичному пропусканні.

На рис. 5 - 6 наведено графіки залежності поперечної термоерс від висоти b та часу t . З графіків видно, що з ростом b поперечна термоерс має складну нелінійну залежність у початкові моменти

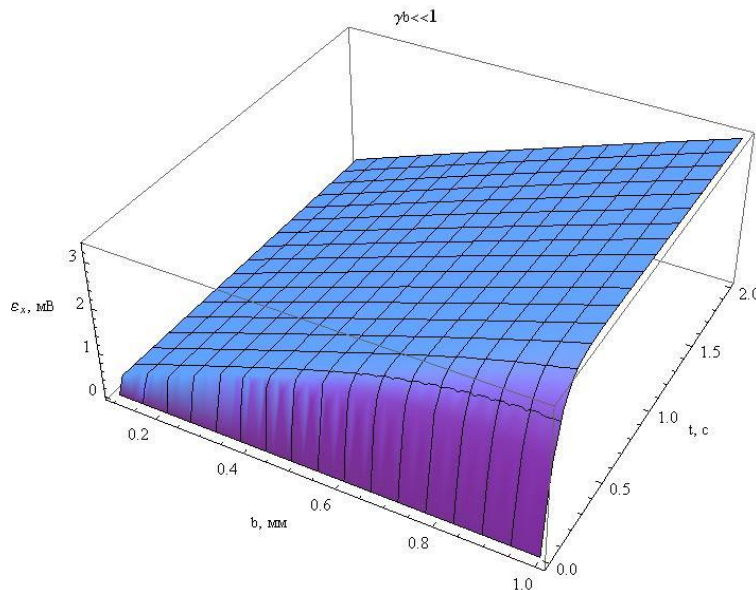


Рис. 5. Залежність поперечної термоерс ε_x АОТ із ZnAs₂ у випадку оптичного пропускання ($\gamma b \ll 1$) від часу t і висоти b термоелемента при термостатуванні нижньої робочої грані.

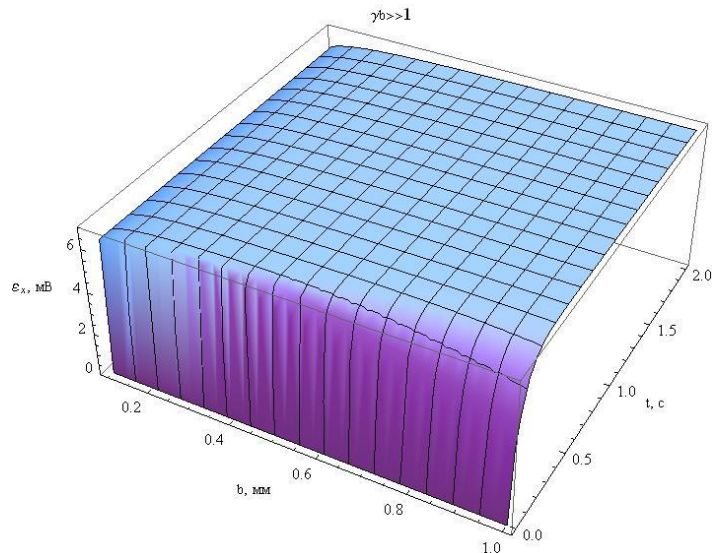


Рис. 6. Залежність поперечної термоерс ε_x АОТ із ZnAs_2 у випадку поверхневого поглинання ($\gamma b \gg 1$) від часу t і висоти b термоелемента при термостатуванні нижньої робочої грані.

часу і квазілінійну залежність у більш пізні моменти часу. Наведені результати теоретичних досліджень АОТ при антипаралельних напрямках променевого потоку і градієнта температури дають можливість реєстрації та контролю променевих потоків підвищеної густини в широкому спектральному

діапазоні.

Гуцул І.В. - доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної фізики.

Гуцул В.І. - кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри теоретичної фізики..

- [1] A.A. Ashheulov, V.M. Kondratenko, Ju.B. Piljavskij, I.M. Rarenko, FTP 5(7), 1330 (1984).
- [2] W. Tomson, Math. Phys. Pub. (1), 266 (1882).
- [3] V.N. Slipchenko, A.A. Snarskij, FTP 8(10), 2010 (1974).
- [4] L.I. Anatyhuk, Termoejenty i termojelektricheskie ustrojstva (Naukova dumka, Kiev, 1979).
- [5] A.A. Snarskij, FTP 11(10), 2053 (1977).
- [6] A.A. Snarskij, A.M. Pal'ti, A.A. Ashheulov, FTP 31(11), 1281 (1997).
- [7] A.A. Ashheulov, I.V. Gucul, A.I. Rarenko, UFZh 42(6), 698 (1997).
- [8] A.A. Ashheulov, I.V. Gucul, A.I. Rarenko, Opt. zhurn. (4), 78 (1993).
- [9] I.V. Gucul, Zhurn. fizichnih doslidzen' 3(1), 98 (1999).
- [10] A.V. Lykov, Teoriya teploprovodnosti (Vysshaja shkola, Moskva, 1967).

I.V. Gutsul, V.I. Gutsul

Non-Stationary Temperature Distribution and Thermoelectromotive Force for Optical Thermoelement at Anti-Parallel Directions of Temperature Gradient and Ray Current

Chernivtsi National University, 58012 Kotsiubynsky Str., 2, Chernivtsi, Ukraine, e-mail: ktf@chnu.edu.ua

The possibilities of utilization of anisotropic optical thermoelements (AOT) with different magnitudes of optical transparency for the registration and transformation of high-intensive ray currents are observed. The solution of non-stationary inhomogeneous equation of thermoconductivity is presented taking into account the Bouguer Lambert law at anti-parallel directions of ray current and temperature gradient for the anisotropic plate ZnAs_2 . It is shown that the non-stationary temperature distribution is determined by anisotropy of thermoconductivity and optical properties of thermoelement material and is characterized by complicated non-linear dependence both of coordinates and time. The expressions for the thermoelectromotive force are obtained for the case of optical transmitting and surface absorption. The dependences of transversal thermoelectromotive force on the time and height of thermoelement are investigated.

Keywords: transversal thermoelectromotive force, coefficient of thermoelectromotive force, coefficient of thermoconductivity, anisotropic thermoelement, thermostat, equation of thermoconductivity, Bouguer Lambert law.